ΟΣ 5

Ασκ. 8

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής : $\forall \varepsilon>0 \ \exists M=M(\varepsilon)>0$:
$$|x|\geq M \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$$

ΝΔο f ο.σ.

Αποδ.

Παρατηρούμε ότι υπόθ. $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Εστω $\varepsilon>0$. $\exists M>0$: $|x|\geq M \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon/3$.

Για $|x|\leq M \Rightarrow x\in[-M,M]$ = κλειστό και f ο.σ. στο $[-M,M]$.

Για το δεδομένο $\varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ (παίρνουμε $\delta<M$) :
$$x,y\in[-M,M] \text{ με } |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/3.$$

Εστω τώρα $x,y\in\mathbb{R}$ με $|x-y|<\delta$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) $x,y\in(-\infty,-M] \Rightarrow |x|,|y|\geq M \Rightarrow$
$$\Rightarrow |f(x)-f(y)|\leq|f(x)|+|f(y)|<\varepsilon/3+\varepsilon/3=2\varepsilon/3<\varepsilon.$$

(ii) $x,y\in[-M,M] \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/3<\varepsilon$.

(iii) $x,y\in[M,+\infty) \Rightarrow |x|,|y|\geq M \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

(iv) $x<-M<y \Rightarrow y<M$ (αφού $y\geq M \Rightarrow |y-x|\geq 2M>2\delta$)

και $|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(M)|+|f(M)-f(y)|\leq$
$$\leq |f(x)|+|f(M)|+|f(M)-f(y)|<3\cdot\varepsilon/3=\varepsilon.$$

(v) $-M<x<M<y \Rightarrow$ όπως στο (iv).

Ασκ 4

Εστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, και $f(x) = x^{1/n}$, $x \in [0,1]$. ΝΔο f δεν ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz. Είναι ο.σ;

Απόδ.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f'(x) = \frac{1}{n} x^{1/n - 1}$, και $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$. Άρα (βλ. Ασκ. 3) η f δεν είναι Lipschitz-συνεχής. Είναι ο.σ, σαν συνεχής σε κλειστό.

Ασκ 14

Εξετάστε αν είναι ο.σ. οι συναρτήσεις:

(iii) $f : (0, \pi] \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{x} \sin^2 x$.

Απάντ.: Η f είναι συνεχής και

$\exists \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = 1 \cdot 0 = 0 \in \mathbb{R}$

άρα είναι ο.σ.

(iv) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

Απάντ.

f συνεχής, αλλά $\nexists \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow f$ όχι ο.σ.

(v) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

Απάντ.

$\exists \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, άρα η f επεκτείνεται σε συνεχή $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$ $\forall x > 0$ και $g(0) = 0$.

Για την g έχουμε:

Η $g|_{[0,1]}$ είναι ο.σ. σαν συνεχής σε κλειστό.

Η $g|_{[1,+\infty)}$ είναι Lipschitz-συνεχής, σαν παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο:

$|g'(x)| = |\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}| \leq |\sin\frac{1}{x}| + \frac{1}{x}|\cos\frac{1}{x}| \leq 2 \quad \forall x \geq 1.$

Άρα η $g|_{[1,+\infty)}$ είναι ο.σ.

Η ομοιόμορφη συνέχεια της g στο $[0,+\infty)$ αποδεικνύεται όπως στην Εφαρμογή (σελ. 12.3). Η f είναι ο.σ. σαν περιορισμός της ο.σ. g.

(vi) $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}: f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Απάντ. Η f είναι συνεχής. Αφού $\exists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow$ η f επεκτείνεται σε συνεχή $g: [0,+\infty)$ με $g(x) = f(x)$ $\forall x \neq 0$ και $g(0) = 1$.

Η $g|_{[0,a]}$ είναι ο.σ. σαν συνεχής σε κλειστό, $\forall a > 0$.

Επίσης, $\forall a > 0$ η $g|_{[a,+\infty)}$ είναι ο.σ. γιατί $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. (Μαθ. 12, Πρόταση*). Όπως στην Εφαρμογή (σελ. 12.3), η $g: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι ο.σ και η f είναι ο.σ. σαν περιορισμός της g στο $(0,+\infty)$.

(vii) $f: (1,+\infty) \to \mathbb{R}: f(x) = \dfrac{\cos(x^3)}{x}$.

Απάντ.

Όπως προηγουμένως: $\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \cos 1. \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow f$ ο.σ.

(viii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$

Απάντ.

$\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$ και η f είναι ο.σ. από Ασκ. 8.

(ix) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Απάντ.

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow f \text{ ο.σ. στο } (-\infty, 0] \\ \exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow f \text{ ο.σ. στο } [0, +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ ο.σ.}$$

(x) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in [-2, 0]$

Απάντ.

f ο.σ., σαν συνεχής σε κλειστό.

(xi) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = x \sin x$.

Απάντ.

Παρατηρούμε ότι $f'(x) = \sin x + x\cos x$ δεν φράσσεται στα $2n\pi$.
Θέτουμε $x_n = 2n\pi$, $y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$. Τότε $y_n - x_n = \frac{1}{n} \to 0$, ενώ

$$|f(y_n) - f(x_n)| = \left|\left(2n\pi + \tfrac{1}{n}\right)\sin\left(2n\pi + \tfrac{1}{n}\right) - 2n\pi \sin(2n\pi)\right| =$$

$$= \left|2n\pi \sin\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n}\sin\tfrac{1}{n}\right| = \left|2\pi \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right|$$

$$\to 2\pi + 0 = 2\pi \neq 0,$$

άρα η f δεν είναι ο.σ.

(xii) $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{\cos x^2}{1+x}$

Αποδ.

f συνεχής και $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ ο.σ.

Ασκ. 7

Εστω $f, g : I \to \mathbb{R}$ ο.σ. και $\lambda \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε την ο.σ. των: (i) $f+g$, (ii) λf, (iii) $f \cdot g$, (iv) $1/f$, αν f

Απάντ.

(i) Εστω $\varepsilon > 0$.

f ο.σ. $\Rightarrow \exists\, \delta_1 > 0 : \forall x, y \in I$ με $|x-y| < \delta_1 : |f(x)-f(y)| < \varepsilon/2$

g ο.σ $\Rightarrow \exists\, \delta_2 > 0 : \forall x, y \in I$ με $|x-y| < \delta_2 : |f(x)-f(y)| < \varepsilon/2$.

Θέτουμε $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Τότε:

$x, y \in I$ με $|x-y| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |(f+g)(x) - (f+g)(y)| = |f(x)+g(x) - f(y) - g(y)| \leq$$

$$\leq |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Αρα η $f+g$ είναι ο.σ.

(ii) Εστω $\varepsilon > 0$. Αν $\lambda \neq 0$, για το $\varepsilon/|\lambda| > 0$:

f ο.σ. $\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : \forall x, y \in I$ με $|x-y| < \delta : |f(x)-f(y)| < \varepsilon/|\lambda|$

$$\Rightarrow |\lambda f(x) - \lambda f(y)| < |\lambda| \varepsilon/|\lambda| = \varepsilon.$$

Αν $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda f = 0$ και $|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |0-0| < \varepsilon$ $\forall x, y \in I$.

Αρα η λf είναι ο.σ.

(iii) Η $f\cdot g$ δεν είναι κατ' ανάγκη ο.σ. Π.χ. στο $\mathbb{R}$:

$f(x)=x$, $g(x)=\sin x$ είναι παραγωγίσιμες με

$|f'(x)|=1$, $|g'(x)|=|\cos x|\leq 1$ φραγμένες $\Rightarrow$ Lipschitz

$\Rightarrow f,g$ ο.σ. Όμως $(f\cdot g)(x)=x\sin x$ δεν είναι ο.σ

(βλ. Ασκ. 14, (xi)).

(iv) Η $1/f$ δεν είναι κατ' ανάγκη ο.σ. Π.χ. η $f(x)=x$, $x\in(0,+\infty)$ είναι ο.σ. αλλά η $(1/f)(x)=1/x$ όχι.

Ασκ.

ΝΔο αν $f,g: I\to\mathbb{R}$ είναι ο.σ., φραγμένες $\Rightarrow f\cdot g$ ο.σ.

Απόδ

Αφού f,g φραγμένες $\Rightarrow \exists\, M,N>0$:

$$|f(x)|\leq M, \quad |g(x)|\leq N, \quad \forall x\in I.$$

Έστω $\varepsilon>0$

f ο.σ $\Rightarrow \exists\, \delta_1>0: \forall x,y\in I$ με $|x-y|<\delta_1$: $|f(x)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{M+N}$.

g ο.σ $\Rightarrow \exists\, \delta_2>0: \forall x,y\in I$ με $|x-y|<\delta_2$: $|g(x)-g(y)|<\dfrac{\varepsilon}{M+N}$.

Θέτοντας $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ παίρνουμε: $\forall x,y\in I$ με $|x-y|<\delta$:

$$|f(x)g(x)-f(y)g(y)|=|f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)|\leq$$

$$\leq |f(x)||g(x)-g(y)|+|f(x)-f(y)|\cdot|g(y)|<$$

$$< M\cdot\frac{\varepsilon}{M+N}+\frac{\varepsilon}{M+N}\cdot N=\varepsilon.$$

05.11

Ασκ. 6

Εστω $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$ ο.σ.

ΝΔο $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι ο.σ.

Αποδ.

Εστω $\varepsilon > 0$.

g ο.σ. $\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : \forall\, y_1, y_2 \in B$ με $|y_1 - y_2| < \delta : |g(y_1) - g(y_2)| < \varepsilon$.

f ο.σ. $\Rightarrow \exists\, \eta > 0 : \forall\, x_1, x_2 \in A$ με $|x_1 - x_2| < \eta : |f(x_1) - f(x_2)| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |g \circ f(x_1) - g \circ f(x_2)| < \varepsilon.$$

Ασκ. 10

ΝΔο $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ο.σ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, A, B > 0 : |f(x)| \leq A|x| + B, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

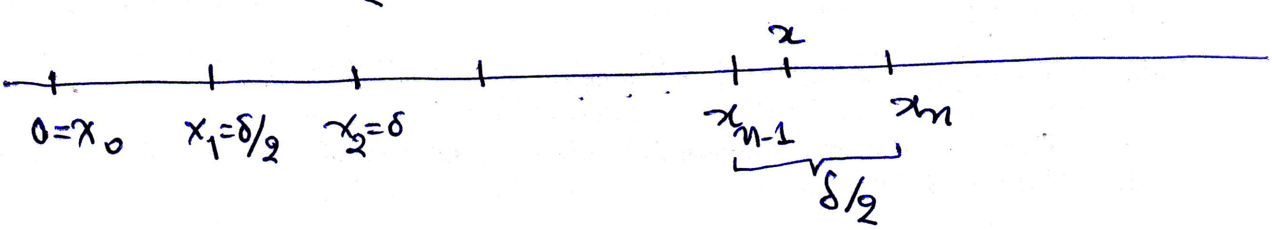
Ισχύει το αντίστροφο;

Αποδ.

Παίρνουμε $\varepsilon = 1 > 0$ και βρίσκουμε το αντίστοιχο $\delta = \delta(1) > 0$, από την ο.σ. της f. 'Εστω $x > 0$.

Θεωρούμε την ακολουθία $\left(x_k = k \cdot \frac{\delta}{2}\right)_{k \in \mathbb{N}}$. Η (x_k) δεν φράσσεται από το $x \in \mathbb{R}$, άρα $\exists!\, n \in \mathbb{N}$:

$$(n-1)\frac{\delta}{2} \leq x < n \cdot \frac{\delta}{2}.$$



Παρατηρούμε ότι:

$$|f(x)| - |f(0)| \leq |f(x) - f(0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f(x_{n-1})| + |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| + \dots + |f(x_1) - f(0)|$$

$$< \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n-\text{πλήθος}} = n = n-1+1 = (n-1)\frac{\delta}{2} \cdot \frac{2}{\delta} + 1$$

$$\leq x \cdot \frac{2}{\delta} + 1 \Rightarrow$$

$$|f(x)| \leq \frac{2}{\delta} \cdot x + 1 + |f(0)|$$

θέτουμε $A = \frac{2}{\delta}$ και $B = 1 + |f(0)|$, και έχουμε το ζητούμενο.

Για $x<0$ με ανάλογο τρόπο.

Ασκ. 11

ΝΔο $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = x^n$, $n > 1$, όχι ο.σ.

Απόδ.

Εστω $f(x) = x^n$ ο.σ. Από την Ασκ. 10, $\exists\, A, B > 0$:

$$|x|^n \leq A|x| + B \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$x^{n-1} \leq A + B/x \leq A + B \quad \forall\, x \geq 1, \text{ άτοπο.}$$

Ασκ. 25

ΝΔο $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, μονότονη και φραγμένη $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ ο.σ.

Απόδ

Έστω $f \uparrow$. Αφού f φραγμένη $\Rightarrow$

$\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = M = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ και

$\exists \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = m = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ $\Rightarrow$

f ο.σ. στα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty) \Rightarrow f$ ο.σ.

Άσκ. 26

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, περιοδική $\Rightarrow f$ ο.σ.

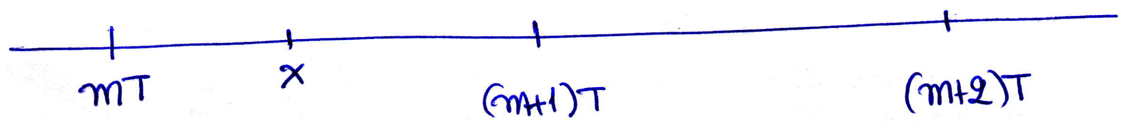
Απόδ.

$\exists\, T > 0 : f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι ο.σ. στο $[0, 2T]$, άρα $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, 0 < \delta < T$:

$\forall x, y \in [0, 2T]$ με $|x-y| < \delta$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ και $|x-y| < \delta$.



$\exists!\, m \in \mathbb{Z}$: $mT \leq x < (m+1)T$. Τότε:

$y < x + \delta < (m+1)T + \delta < (m+1)T + T = (m+2)T \Rightarrow$

$x, y \in [mT, (m+2)T] \Rightarrow x - mT,\ y - mT \in [0, 2T]$ και

$|(x-mT) - (y-mT)| = |x-y| < \delta$, άρα

$|f(x) - f(y)| = |f(x-mT) - f(y-mT)| < \varepsilon$.