ΜΑΘΗΜΑ 11

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ & ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Υπενθ: $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in A$ $\Leftrightarrow$
$\forall (x_n) : x_n \in A$ και $x_n \to x_0 : f(x_n) \to f(x_0)$.

ΘΕΩΡ. 1 $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής $\Leftrightarrow$
$\forall$ ζεύγος $(x_n), (y_n)$ ακολουθιών με $x_n, y_n \in A$ και $x_n - y_n \to 0$:
$f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Απόδ. ($\Rightarrow$) Εστω f ο.σ. και $(x_n), (y_n)$ ακολουθίες στο A με $x_n - y_n \to 0$. ΘΔο $f(x_n) - f(y_n) \to 0$:

Εστω $\varepsilon > 0$. Από την ο.σ. της f, $\exists\, \delta > 0 : \forall\, x, y \in A$:

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad \circledast$$

Για το $\delta > 0$, από την σύγκλιση $x_n - y_n \to 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:
$\forall\, n \geq n_0$:

$$|x_n - y_n| < \delta \overset{\circledast}{\Rightarrow} |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon.$$

Τα υπογραμμισμένα είναι ο ορσ. της σύγκλισης
$f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

($\Leftarrow$) Με άτοπο: Εστω f όχι ο.σ. Τότε:
$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, \delta > 0\ \exists\, x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$ και $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.
Για το $\varepsilon > 0$ που προκύπτει από την άρνηση του ορισμού, παίρνουμε διαδοχικά:

για $\delta = 1 \Rightarrow \exists\, x_1, y_1 \in A : |x_1 - y_1| < 1$ και $|f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$.

για $\delta = 1/2 \Rightarrow \exists\, x_2, y_2 \in A : |x_2 - y_2| < 1/2$ και $|f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon$

$\vdots$

για $\delta = 1/n \Rightarrow \exists\, x_n, y_n \in A : \underbrace{|x_n - y_n| < 1/n}_{\Downarrow\ x_n - y_n \to 0}$ και $\underbrace{|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon}_{\Downarrow\ f(x_n) - f(y_n) \not\to 0,}$

άτοπο. ∎

π.χ.

(1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=ax+\beta,\ a,\beta\in\mathbb{R}$.

$(x_n),(y_n)$ στο $\mathbb{R}$: $x_n-y_n\to 0 \Rightarrow ax_n-ay_n\to a\cdot 0=0\Rightarrow$

$\Rightarrow ax_n+\beta-ay_n+\beta\to 0\Rightarrow f(x_n)-f(y_n)\to 0$.

Δηλ. η $f(x)=ax+\beta$ είναι ο.σ.

(2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=x^2$.

Θέτουμε $x_n=n+1/n$, $y_n=n$, $n\in\mathbb{N}$. Τότε $x_n-y_n=1/n\to 0$,

αλλά $f(x_n)-f(y_n)=n^2+2+\frac{1}{n^2}-n^2=2+\frac{1}{n^2}\to 2$, άρα η

f δεν είναι ο.σ.

(3) $f(x)=1/x$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Θέτουμε $x_n=1/n$, $y_n=1/2n$, $n\in\mathbb{N}$. Τότε $x_n-y_n=1/2n\to 0$

αλλά $f(x_n)-f(y_n)=n-2n=-n\to-\infty$, άρα η $f(x)=1/x$

δεν είναι ο.σ.

(4) $f(x)=\cos(x^2)$, $x\in\mathbb{R}$.

Θέτουμε $x_n=\sqrt{(n+1)\pi}$, $y_n=\sqrt{n\pi}$, $n\in\mathbb{N}$. Τότε:

$$x_n-y_n=\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}}\to 0,$$ αλλά

$|f(x_n)-f(y_n)|=|\cos((n+1)\pi)-\cos(n\pi)|=2\to 2$, άρα η

$f(x)=\cos(x^2)$ δεν είναι ο.σ. (παρ' όλο που είναι συνεχής

και φραγμένη).

Θεώρ. 2 Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ ο.σ. και (x_n) στο A ακολουθία Cauchy. Τότε $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy.

Απόδ. Θεωρούμε μια ακολουθία Cauchy (x_n) στο A.

ΘΔο $(f(x_n))$ είναι Cauchy.

Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή f ο.σ., $\exists\ \delta>0: \forall\ x,y\in A$:

$$|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Επειδή (x_n) είναι Cauchy, για το $\delta>0$, $\exists\ n_0\in\mathbb{N}$:

$\forall m,n \geq n_0: \; |x_n - x_m| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$

Τα υπογραμμισμένα είναι ο ορσ. $(f(x_n))$ Cauchy. ■

Σχόλια (1) Γνωρίζουμε ότι στο $\mathbb{R}$: βασική $\Leftrightarrow$ συγκλίνουσα. Όμως μπορεί στο $A \subseteq \mathbb{R}$ μια ακολουθία να είναι βασική, χωρίς να έχει όριο μέσα στο A. π.χ. για $A = (0,2)$, η $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική, αλλά δεν έχει όριο στο A.

(2) Το Θ.2 δεν είναι χαρακτηρισμός της ομοιόμ. συνέχειας: δεν ισχύει το αντίστροφο: Η $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ στέλνει τις συγκλίνουσες ακολουθίες σε συγκλίνουσες (αφού είναι συνεχής), άρα τις βασικές σε βασικές, χωρίς να είναι ο.σ.

(3) Οι συνεχείς απεικονίσεις δεν έχουν την ιδιότητα του Θ.2: Η $f(x) = 1/x$, $x \in (0,1)$ είναι συνεχής, σαν τέτοια στέλνει τις συγκλίνουσες (x_n) του $(0,1)$ που έχουν όριο μέσα στο $(0,1)$ σε συγκλίνουσες, αλλά την $(1/n)_{n \geq 2}$ που είναι βασική, σαν συγκλίνουσα (αλλά με όριο $0 \notin (0,1)$), την στέλνει στην $(f(1/n) = n)$ που δεν είναι βασική.