TEST 2

Θ1. (i) Λάθος:

$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 1/k$ συγκλίνει από κρ. Leibniz αλλά αν $a_{k_n}=a_{2n}=1/2k$, η αντίστοιχη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2k = 1/2 \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$, αποκλίνει.

(ii) Λάθος: $(a_n=1/n)$, $(a_{k_n}=a_{n^2}=1/n^2) \Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ αποκλίνει, ενώ $\sum a_{k_n} = \sum 1/k^2$

συγκλίνει.

Θ2. Παρατηρούμε ότι $0 \le \sqrt[n]{|a_n|} \le a < 1$.

$\Rightarrow 0 \le |a_n| < a^n$, $\forall n \ge n_0$.

$\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} a^k$ συγκλίνει $\Rightarrow$ (κρ. σύγκρισης)

$\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει απολύτως.

Επίσης:

$|a_n| \le a^n \quad \forall n \ge n_0 \Rightarrow$

$$\left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k\right| \le \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| \le \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a^k = a^{n_0+1} + a^{n_0+2} + \cdots$$

$$= a^{n_0+1}(1+a+a^2+\cdots) = a^{n_0+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a^k =$$

$$= \frac{a^{n_0+1}}{1-a}.$$

$\boxed{\Theta 3}$ (i) $\Sigma 1/k$ αποκλίνει, $\Sigma 1/k^2$ συγκλίνει.

Αν $\Sigma(1/k - 1/k^2)$ συγκλίνει, τότε

$\Sigma(1/k - 1/k^2) = \Sigma 1/k - \Sigma 1/k^2$ συγκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma 1/k = \Sigma(1/k - 1/k^2) + \Sigma 1/k^2$ συγκλίνει, άτοπο.

Άρα αποκλίνει.

(ii) Παρατηρούμε ότι $\dfrac{k\sin 1/k^3}{1/k^2} = \dfrac{\sin 1/k^3}{1/k^3} \to 1.$

Επειδή $\Sigma 1/k^2$ συγκλίνει,

από το κρ. ισοδύναμης συμπεριφοράς, η σειρά

$\Sigma k \sin \frac{1}{k^3}$ συγκλίνει.

(iii) $\sqrt[n]{(1+1/n)^{-n^2}} = (1+1/n)^{-n} = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \dfrac{1}{e} < 1.$

Από κρ. ρίζας, η σειρά

$\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/k)^{-k^2}$ συγκλίνει.

(iv) Η ακολουθία $(a_k = \frac{k+1}{k})$ είναι $\downarrow$.

$\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{k+2}{k+1} \cdot \dfrac{k}{k+1} = \dfrac{k^2+2k}{k^2+2k+1} < 1 \Rightarrow a_{k+1} < a_k.$

Άρα $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \downarrow$ και $\frac{k+1}{k} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) > 0$

και $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ από κρ. Leibniz.

(v) $\sqrt[k]{ke^{-k}} = \sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{1/e^k} \to 1 \cdot 1/e = 1/e < 1.$

Από κρ. ρίζας η $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k}$ συγκλίνει.

Θ4 Έστω $a=\limsup a_n<1$.

Θέτουμε $\varepsilon := \frac{1-a}{2}>0$ και $\omega=a+\varepsilon<1$. Υπάρχει πεπερασμένο πλήθος όρων $a_k>\omega$, άρα $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$: $0<a_n\le\omega,\ \forall\, n\ge n_0$.

Έστω $b_k=a_1\cdot a_2\cdots a_k$. Τότε $\forall\, k\in\mathbb{N}$:

$$b_{n_0+k}=\underbrace{a_1\cdots a_{n_0}}_{A}\cdot a_{n_0+1}\cdots a_{n_0+k}\le A\cdot\omega^k.$$

Άρα:

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_{n_0+k}\le A\sum_{k=1}^{\infty}\omega^k<\infty\Rightarrow\sum_{k=n_0+1}^{\infty}(a_1\cdots a_k)<\infty\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}(a_1\cdots a_k)\ \text{συγκλίνει.}$$

Θ5 (i) Παρατηρούμε ότι $b^k<a^k+b^k<2b^k\Rightarrow$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ b}}{b}<\sqrt[k]{a^k+b^k}<\underset{\substack{\downarrow\\ b\cdot 1=b}}{b\sqrt[k]{2}}\Rightarrow\sqrt[k]{a^k+b^k}=b$$

$\Rightarrow R=1/b$.

$\Rightarrow$ η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x|<1/b$ και αποκλίνει για $|x|>1/b$.

Αν $|x|=1/b\Rightarrow|(a^k+b^k)x^k|=(a^k+b^k)|x^k|=$

$=(a/b)^k+1\not\to 0.\Rightarrow$ σειρά αποκλίνει.

Άρα συγκλίνει για $x\in(-1/b,1/b)$.

(ii) Παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)\ln(k+1)}\cdot\frac{k\ln k}{x^{k+1}}\right| = |x|\cdot\frac{k}{k+1}\cdot\frac{\ln k}{\ln(k+1)}$$

Θεωρώ την (παραγωγίσιμη) συνάρτηση

$$f(x)=\frac{\ln x}{\ln(x+1)}, \quad x\in[1,+\infty).$$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty} \rightsquigarrow \lim_{+\infty}\frac{(\ln x)'}{(\ln(x+1))'} = \lim_{+\infty}\frac{1/x}{1/(x+1)} = 1.$$

Άρα (κρ. λόγου) η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k\ln k}$ συγκλίνει για $|x|<1$ και αποκλίνει για $|x|>1$.

Για $x=-1$ προκύπτει η $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\ln k}$ που συγκλίνει από κρ. Leibniz, αφού

$$\frac{1}{k\ln k}>0 \quad \text{και} \quad \left(\frac{1}{k\ln k}\right)\downarrow.$$

Για $x=1$ προκύπτει η $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\ln k}$ που αποκλίνει, από κρ. συμπύκνωσης:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{2^k\ln(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{\infty}1/k.$$

Άρα η δυναμοσειρά $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k\ln k}$ συγκλίνει για $x\in[-1,1)$.