

ΤΕΣΤ 2

Θ1. Έστω (a_n) ακολουθία στο \mathbb{R} και (a_{2n}) υπακολουθία της. Να εξεταστέτε αν ισχύει κάθε μια από τις ευρετημαχές:

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ συγκλίνει} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \text{ συγκλίνει.}$$

$$(ii) \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \text{ συγκλίνει} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ συγκλίνει.}$$

Θ2. Έστω (a_n) ακολουθία στο \mathbb{R} , $n_0 \in \mathbb{N}$, $0 < a < 1$:
 $\sqrt[n]{|a_n|} \leq a$, $\forall n \geq n_0$. Νδσ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απόλυτως και $|\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k| \leq \frac{a^{n_0+1}}{1-a}$.

Θ3. Να εξεταστεί η σύγκλιση των σειρών:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right), \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \sin \frac{1}{k^3}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln \left(\frac{k+1}{k} \right), \quad \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k}$$

Θ4. Έστω ακολουθία (a_k) : $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$ και $\limsup a_n < 1$. Νδσ $\sum_{k=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_2 \cdots a_k)$ συγκλίνει.

Θ5. Να βρεθεί για ποιά $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνουν οι δυναμοσειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a^k + b^k) x^k, \quad \text{όπου } 0 < a < b$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k \ln k}$$