Ασκ. 29

Έστω $(a_k)\downarrow$, $a_k>0$, $\forall k\in\mathbb{N}$. Νδο αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow k a_k \to 0$.

Αποδ.

Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, η αντίστοιχη (S_n) είναι Cauchy.

Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή (S_n) Cauchy, για το $\varepsilon/2>0$:

$\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n>m\geq n_0: |S_n-S_m|<\varepsilon/2$.

Παίρνουμε $m=n_0$ και $n\geq 2n_0$. Τότε:

$$2n_0\leq n \Leftrightarrow 0\leq n-2n_0 \Leftrightarrow n\leq 2n-2n_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2}\leq n-n_0$$

και:

$$\frac{na_n}{2}\leq (n-n_0)a_n\leq \underbrace{a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\dots+a_n}_{=S_n-S_{n_0}}<\varepsilon/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow na_n<\varepsilon, \quad \forall n\geq 2n_0.$$

Ασκ. 30

Έστω $a_k>0$, $\forall k\in\mathbb{N}$, και $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Τότε οι $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{1+a_k}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2}{1+a_k^2}$ συγκλίνουν.

Αποδ. (α) $a_k\to 0 \Rightarrow$ για $\varepsilon=1>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall k\geq n_0$:
$0<a_k<1 \Rightarrow 0<a_k^2<a_k \Rightarrow \sum a_k^2$ συγκλίνει (κρ. σύγκρισης).

(β) $0<\frac{a_k}{1+a_k}<a_k \Rightarrow \sum \frac{a_k}{1+a_k}$ συγκλίνει (απο κρ. σύγκρισης)

(γ) ομοίως: $0<\frac{a_k^2}{1+a_k^2}<a_k^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2}{1+a_k^2}$ συγκλίνει (απο (α)+(κρ. σύγκρισης)).

Ασκ. 31

Εστω (a_k) με $a_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

(i) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, νδο η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_{k+1} a_k}$ συγκλίνει.

(ii) Αν $(a_k) \downarrow$, νδο ισχύει και το αντίστροφο.

Απόδ.

(i) Γνωρίζουμε ότι $0 \leq \sqrt{a_k a_{k+1}} \leq \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$.

Θεωρώ την σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + a_{k+1}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} a_k$$

που συγκλίνει, σαν γραμμικός συνδυασμός σειρών που συγκλίνουν. Από το κρ. σύγκρισης, η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει.

(ii) Αν $(a_k) \downarrow \Rightarrow 0 \leq a_{k+1} \leq a_k \Rightarrow 0 \leq a_{k+1}^2 \leq \sqrt{a_{k+1} a_k}$

$\Rightarrow 0 \leq a_{k+1} \leq \sqrt{a_k a_{k+1}}$ και το αποτέλεσμα προκύπτει πάλι από το κρ. σύγκρισης.

Ασκ. 32

$a_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ και $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.

Απόδ. Γνωρίζουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$\forall\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

[ή, ισοδύναμα, $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$].

Εφαρμόζουμε για $x_i = \sqrt{a_i}$ και $y_i = \frac{1}{i}$: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} 1/k^2\right)^{1/2}$$

Όμως οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ συγκλίνουν σε πραγματικούς $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$, αντίστοιχα. Επειδή οι ακολουθίες (a_n), $(1/n^2)$ και $\left(\frac{\sqrt{a_n}}{n}\right)$ έχουν θετικούς όρους, οι ακολουθίες μερικών αθροισμάτων $\sum_{k=1}^{n} a_k = s_n$, $\sum_{k=1}^{n} 1/k^2 = t^n$ και $\omega_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ είναι αύξουσες. Άρα $s_n \leq M_1$, $t_n \leq M_2$ και $\omega_n \leq (M_1 M_2)^{1/2}$, δηλ. η (ω_n) είναι $\uparrow$ και άνω φραγμένη από το $(M_1 M_2)^{1/2}$. Άρα συγκλίνει.

Άσκ. 33

Έστω $a_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, και $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Νδο

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1$$

<u>Αποδ.</u> Παρατηρούμε ότι $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{k-1})} - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{k-1})(1+a_k)}$$

Θέτουμε $b_0 = 1$ και $b_k = \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)}$. Τότε:

$$\frac{a_k}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)} = b_{k-1} - b_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Άρα η δεδομένη σειρά είναι τηλεσκοπική, και συγκλίνει στο $b_0 - \lim b_n$, αν και μόνον αν η b_n συγκλίνει.

Επειδή:

$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k) \geq a_1+a_2+\cdots+a_k \to +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow b_k \to 0$. Δηλ:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)} = b_0 - \lim b_n = 1-0=1.$$

Ασκ. 34

Εστω $(a_k)\downarrow$, $a_k \to 0$ και $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Νδο

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \min\{a_k, 1/k\} = +\infty.$$

Αποδ. Εστω ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \min\{a_k, 1/k\}$ συγκλίνει.

Παρατηρούμε ότι:

$a_k > 0,\ 1/k > 0 \Rightarrow \min\{a_k, 1/k\} > 0.$

Επίσης:

$$\left.\begin{aligned} \min\{a_{k+1}, \tfrac{1}{k+1}\} &\leq a_{k+1} \leq a_k \\ \min\{a_{k+1}, \tfrac{1}{k+1}\} &\leq \tfrac{1}{k+1} \leq \tfrac{1}{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min\{a_{k+1}, \tfrac{1}{k+1}\} \leq \min\{a_k, \tfrac{1}{k}\}.$$

Αρα η ακολουθία $(\min\{a_k, \frac{1}{k}\})$ είναι φθίνουσα, θετικών όρων, δηλ. για την αντίστοιχη σειρά ισχύει το κριτήριο της συμπύκνωσης. Αφού υποθέσαμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \min\{a_k, 1/k\}$ συγκλίνει $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \min\{a_{2^k}, 1/2^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \min\{2^k a_{2^k}, \frac{2^k}{2^k}\} \text{ συγκλίνει} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \min\{2^k a_{2^k}, 1\} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \min\{2^n a_{2^n}, 1\}$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \min\{2^n a_{2^n}, 1\} = 2^n a_{2^n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} \min\{2^k a_{2^k}, 1\} = \sum_{k=n_0}^{\infty} 2^k a_{2^k}.$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει $\Rightarrow$ (κρ. συμπ. για την (a_k))

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ αποκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ αποκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} \min\{2^k a_{2^k}, 1\}$ αποκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \min\{2^k a_{2^k}, 1\}$ αποκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \min\{a_k, \frac{1}{k}\}$ αποκλίνει, άτοπο.