ΜΑΘΗΜΑ 9

Ο ΑΡΙΘΜΟΣ e

Ο αριθμός $e \in \mathbb{R}$ είναι εξ ορισμού όριο μιας (γνησίως αύξουσας) ακολουθίας $(\varepsilon_n = (1+1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Θα δ. τώρα ότι ο e είναι και άθροισμα μιας σειράς.

ΠΡΟΤ. 1. $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

(Υπενθ: $0! = 1$).

Απόδ. Θεωρούμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $(b_n = 1/n!)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Σταθεροποιούμε ένα $n \in \mathbb{N}$ και παρατηρούμε:

$$\varepsilon_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}\cdot 1^n \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$

$$+ \dots + \binom{n}{n} 1^0 \left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + \frac{n!}{1!(n-1)!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots +$$

$$+ \frac{n!}{(n-1)!\,1!}\cdot\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} +$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots 2}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \leq$$

[επειδή $0 < 1-\frac{k}{n} < 1, \ \forall\, k=1,\ldots,n-1$]

$$\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = S_n .$$

Δείξαμε ότι $\underset{\downarrow\, e}{\varepsilon_n} \leq S_n$, με $(S_n)\uparrow$ (προφανώς).

Αν (S_n) άνω φραγμένη, τότε $S_n \to \underset{}{\overset{\mathbb{R}\atop\in}{S}} \geq e$. ΟΣο είναι φραγμένη. Παίρνουμε $k > n =$ σταθ. Τότε:

$$\underset{\downarrow\, e}{\varepsilon_k} = \left(1+\frac{1}{k}\right) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{k}\right) +$$

$$\underbrace{+ \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{k}\right)}_{\text{Τους πετάω.}}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{n=\text{σταθ}}$$

$$\longrightarrow 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-0) + \frac{1}{3!}(1-0)(1-0) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-0)\cdots(1-0)$$

$$= S_n \Rightarrow e \geq S_n$$

Απλ. (s_n) άνω φραγμένη από e, άρα $\exists \lim s_n = s \in \mathbb{R}$ και $e \geq s_n \Rightarrow e \geq s$.

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες έχουμε $s = e$. ∎

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. Ο e είναι άρρητος.

Απόδ. Έστω $e = m/n$, $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$e = \frac{m}{n} = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \frac{1}{(n+k)!} + \dots\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\quad} = n!\left[\frac{m}{n} - (\quad)\right] = n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!}$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} + \dots$$

Παρατηρούμε ότι αν $a_k = \dfrac{1}{(n+1)\dots(n+k)}$, τότε:

$a_1 = \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{2}$

$a_2 = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \dfrac{1}{6}$

$a_3 \leq \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} \lneqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

$\vdots$

$a_k \lneqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$, οπότε $0 < A < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^3} \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{11}{12}$$

όμως $\nexists$ $\mathbb{N} \ni A$ με $A \in (0, 11/12)$, άτοπο. ∎