ΜΑΘΗΜΑ 8
ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

<u>ΟΡΣ 1.</u> Έστω $(a_n)_{n=0,1,\dots}$ ακολουθία. Ονομάζουμε <u>δυναμοσειρά</u> με <u>συντελεστές</u> a_k και <u>παράμετρο</u> $x\in\mathbb{R}$ την σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Ενδιαφερόμαστε για ποιά x συγκλίνει. Αν συγκλίνει για κάποιο συγκεκριμένο $x\in\mathbb{R}$, λέμε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ <u>συγκλίνει στο x.</u>

Όλες οι δυναμοσειρές συγκλίνουν στο 0 (:συγκλίνουν αν θέσουμε $x=0$).

<u>ΠΡΟΤ. 1.</u> Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

(α) Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στο $0\neq y\in\mathbb{R}$ και $|x|<|y|$ $\Rightarrow$ η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο x.

(β) Αν η δυναμοσειρά αποκλίνει στο $0\neq y\in\mathbb{R}$ και $|x|>|y|$ $\Rightarrow$ η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.

<u>Απόδ.</u>

(α) Αφού $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ συγκλίνει $\Rightarrow a_k y^k \to 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ για $\varepsilon = 1>0$ $\exists\, N\in\mathbb{N}: \forall\, k\geq N:$ $0\leq |a_k y^k| < 1$.

Έστω $x\in\mathbb{R}$ με $|x|<|y|$. Τότε:

$$|a_k x^k| = |a_k y^k|\cdot\left|\frac{x^k}{y^k}\right| < \left|\frac{x}{y}\right|^k, \quad \forall\, k\geq N,$$

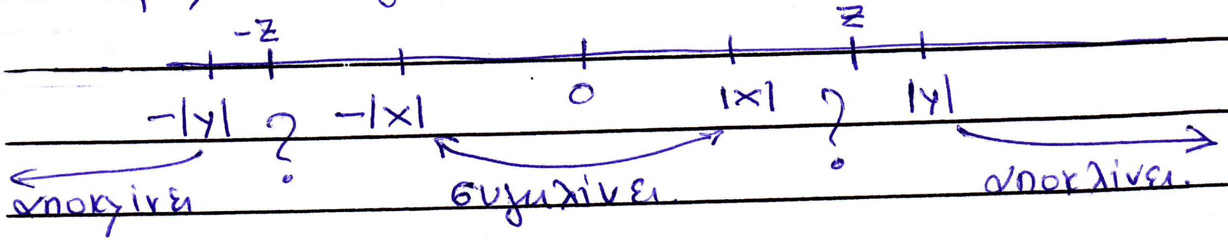
και η $\sum_{k=N}^{\infty}\left|\frac{x}{y}\right|^k$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{k=N}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως.

(β). Με άτοπο, από το (α): αν η $\sum a_k x^k$ συγκλίνει, αφού $|y|<|x|$ λόγω του (α) η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ συγκλίνει απολύτως, άτοπο. ∎

<u>Συμπέρασμα:</u> Αν μια $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει στο $x\neq 0$, τότε συγκλίνει σε όλο το διάστημα $(-|x|,|x|)$.

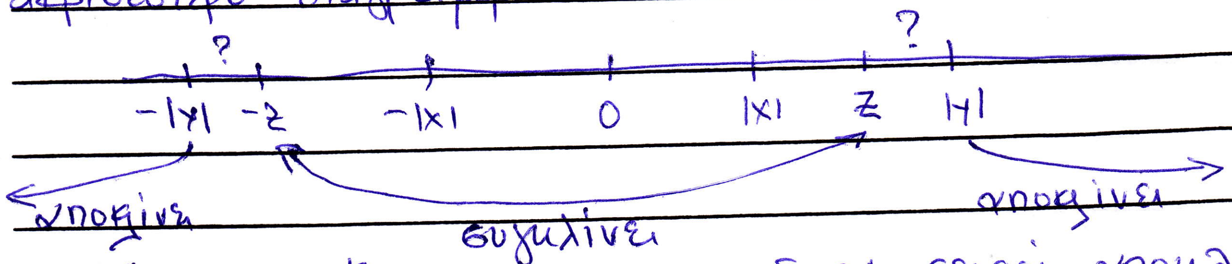
Αν μια σειρά αποκλίνει στο $0\neq y\in\mathbb{R}$, τότε αποκλίνει στο $(-\infty,-|y|)\cup(|y|,+\infty)$.

Άρα, αν συγκλίνει στο x και αποκλίνει στο y,

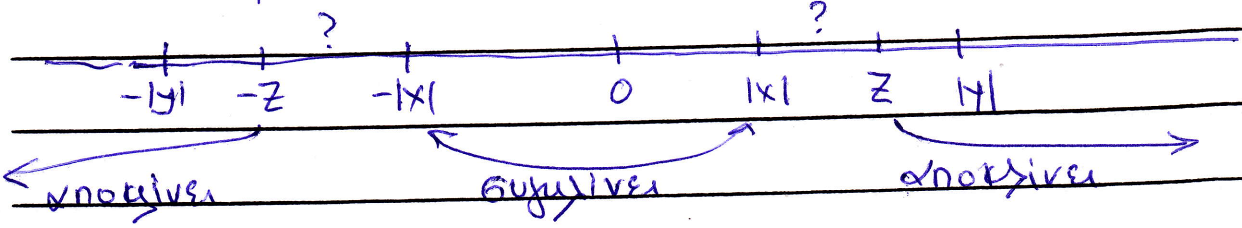


Έστω και $z\in(|x|,|y|)$.

Αν $\sum a_k z^k$ συγκλίνει $\Rightarrow$ η δυναμοσειρά συκλίνει σε κάθε σημείο του $(-z,z)$, και παίρνουμε το ακριβέστερο διάγραμμα



Αν $\sum a_k z^k$ αποκλίνει $\Rightarrow$ η δυναμοσειρά αποκλίνει σε κάθε σημείο της ένωσης $(-\infty,-z)\cup(z,+\infty)$, δηλ.



<u>ΟΡΣ.2 Ακτίνα σύγκλισης</u> της $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ είναι το

$$R=\sup\{|x| : \text{η } \textstyle\sum a_k x^k \text{ συγκλίνει στο } x\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$0 \in \{|x| : \text{η } \sum a_k x^k \text{ συγκλίνει στο } x\} \neq \emptyset$

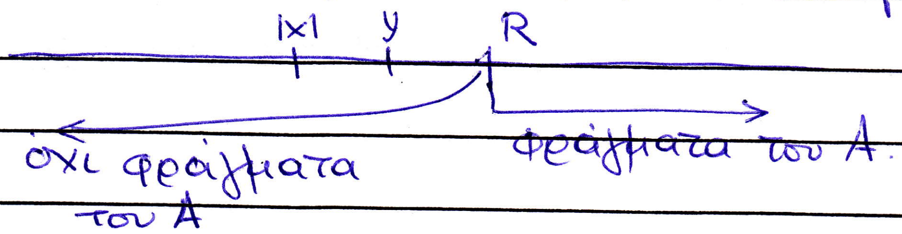
Το σύνολο αυτό μπορεί να είναι ή να μην είναι φραγμένο, άρα μπορεί $R \in \mathbb{R}$ ή $R = +\infty$.

Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο $x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{|x| : \text{η } \sum a_k x^k \text{ συγκλίνει στο } x\} = \{0\}$ και $R = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ με $0 \neq R \in \mathbb{R}$. Τότε η $\sum a_k x^k$ συγκλίνει σε κάθε $x \in (-R, R)$ και αποκλίνει σε κάθε $x \notin [-R, R]$.

Απόδ. Έστω $x \in (-R, R) \Rightarrow |x| < R = \sup A \Rightarrow$



$\Rightarrow \exists\, y \in A : \quad |x| < y = |y| < R$

Επειδή $y \in A = \{|x| : \text{η } \sum a_k x^k \text{ συγκλίνει στο } x\} \Rightarrow$ η $\sum a_k x^k$ συγκλίνει στο $y \Rightarrow$ συγκλίνει απολύτως στο x.

Έστω τώρα $x \notin [-R, R] \Rightarrow |x| > R$. Αν η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει $\Rightarrow |x| \in A \Rightarrow |x| \leq R$, άτοπο.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει μια μέθοδο για να υπολογίζουμε το R.

ΘΕΩΡ.

Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ και έστω ότι $\exists \lim \sqrt[k]{|a_k|} = a$. Θέτουμε:

$R = 1/a$, αν $0 \neq a \in \mathbb{R}$

$R = +\infty$, αν $a = 0$

$R = 0$, αν $a = +\infty$.

Τότε: (i) Αν $|x| < R \Rightarrow \sum a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως στο x.

(ii) Αν $|x| > R \Rightarrow \sum a_k x^k$ αποκλίνει στο x.

Αποδ.

1η περίπτωση: $0 \neq a \in \mathbb{R}$, οπότε $0 \neq R \in \mathbb{R}$.

(i) $|x| < R \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \cdot \sqrt[k]{|a_k|} \to |x| \cdot a =$
$= |x| \cdot 1/R < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ η $\sum a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως στο δεδομένο $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $|x| > R \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k x^k|} \to |x| \cdot a = x \cdot 1/R > 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ αποκλίνει στο δεδομένο x.

2η περίπτωση: $a = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow R = +\infty$. και $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x| < R$. Έστω $x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow \sqrt[k]{|a_k x^k|} \to |x| \cdot 0 = 0 < 1$
$\Rightarrow \sum a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως.

3η περίπτωση: $a = +\infty \Rightarrow R = 0$. Έστω $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$:
$\sqrt[k]{|a_k x^k|} \to \underbrace{|x|}_{>0} \cdot (+\infty) = +\infty \Rightarrow \sum a_k x^k$ αποκλίνει.