ΜΑΘΗΜΑ 6

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ.

Παρακάτω εξετάζουμε την σύγκλιση σειρών που προκύπτει από ιδιότητες της (a_n).

ΘΕΩΡ 1. Αν $a_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, τότε
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ (S_n) φραγμένη.

Απόδ. $a_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\rightarrow$ $(S_n)\uparrow$. ∎

Παρατ. Προφανώς, αν $a_k \geq 0$ και (S_n) όχι φραγμ.
$\Rightarrow$ $(S_n)\uparrow$ όχι φραγμ. $\rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$. Πχ $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = +\infty$.

Ιδιαίτερη περίπτωση είναι οι ακολουθίες με φθίνοντες μη αρνητικούς όρους. Δηλ. $a_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ και $(a_k)\downarrow$

ΘΕΩΡ 2 (Κριτήριο Συμπύκνωσης)
Εστω $(a_k)\downarrow$ με $a_k > 0$. Τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.

Απόδ. Συμβολίζουμε με (S_n) και (t_n) τις ακολουθίες μερικών αθροισμάτων των $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$, αντίστοιχα.
Δηλ:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$
$$t_n = 2^0 a_{2^0} + 2^1 a_{2^1} + 2^2 a_{2^2} + \dots + 2^n a_{2^n} =$$
$$= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots + 2^n a_{2^n}.$$

Παρατηρούμε ότι $(s_n)\uparrow$ και $(t_n)\uparrow$.

Έστω ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Τότε (s_n) άνω φραγμ. από $M>0$. Θδο και (t_n) άνω φραγμένη.

$$t_n = a_1 + 2a_2 + \underbrace{4a_4} + \underbrace{8a_8} + \cdots + \underbrace{2^n a_{2^n}}$$

$$\leq 2a_1 + 2a_2 + \underbrace{2a_3 + 2a_4} + \underbrace{2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8} +$$

$$+ \cdots + 2\underbrace{(a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n})}$$

$$= 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n}) =$$

$$= 2 s_{2^n} \leq 2M.$$

Αντίστροφα, έστω ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. Τότε η (t_n) είναι άνω φραγμ., έστω από το $N>0$. Θδο και (s_n) είναι άνω φραγμ. Παίρνουμε τυχαίο $m \in \mathbb{N}$. Τότε το m βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δυνάμεις του 2, δηλ. $\exists n \in \mathbb{N}: \ 2^n \leq m < 2^{n+1} \Rightarrow$

$$s_m = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots +$$

$$+ (a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n - 1}) +$$

$$+ (a_{2^n} + a_{2^n+1} + \cdots + a_m) \leq$$

$$\leq a_1 + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_m + \cdots + a_{2^{n+1}-1}).$$

$$\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} =$$

$$= t_n \leq N. \ \blacksquare$$

Παραδείγματα

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$, $p>0$. Είναι $a_k = 1/k^p > 0$ και $(a_k)\downarrow$.

Από το κριτήριο της συμπύκνωσης η $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k/(2^k)^p$ συγκλίνει.

Όμως: $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k/(2^k)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$ είναι γεωμετρική

σειρά με λόγο $x = \frac{1}{2^{p-1}} > 0$, όπου $x < 1 \iff p > 1$.
Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$ και, ισοδύναμα, η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k/(2^k)^p$
συγκλίνουν $\iff p > 1$.

Αν $p \leq 1$, και οι δύο σειρές αποκλίνουν στο $+\infty$.
$[p=1 \to ?]$

(2). $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$, $p > 0$.

Παρατηρούμε ότι $(a_k)\downarrow$ και $a_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε την
$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k(\ln 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p(\ln 2)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$
η οποία συγκλίνει $\iff p > 1$.

και από το κρ. συμπ. η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$ συγκλίνει
$\iff p > 1$.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Μπορείτε να διατυπώσετε και να αποδείξετε το κρ. συμπύκνωσης αντικαθιστώντας το 2 με 3;

ΟΡΣ. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως, αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει.

Λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει υπό συνθήκη, αν συγκλίνει, αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως $\Rightarrow$ συγκλίνει.

Απόδ. Θδο ισχύει κριτήριο του Cauchy: Έστω $\varepsilon > 0$.
Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει $\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall\, n > m \geq n_0$:
$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon.$$

Όμως τότε

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Παραδείγματα.

(1) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ συγκλίνει. Πράγματι, συγκλίνει απολύτως:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$ και συγκλίνει αφού είναι

της μορφής $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, με $p=2>1$.

(2) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ δεν συγκλίνει απολύτως, αφού η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

δεν συγκλίνει. Όμως η αρχική σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη: Πράγματι, θεωρούμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων (S_n) της $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, και τις υπακολουθίες (S_{2n}), (S_{2n-1}). Τότε

$$S_{2n} = \underbrace{1-\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}} =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n}.$$

Επειδή $S_{2(n+1)} = S_{2n} + \frac{1}{(2n+1)2(n+1)} > S_{2n}$, έχουμε $(S_{2n}) \uparrow$.
Επίσης, επειδή

$$S_{2n} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} = t_{2n},$$

όπου t_{2n} το $2n$-μερικό άθροισμα της συγκλίνουσας σειράς

$\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$, η (s_{2n}) είναι φραγμένη, αφού (t_n) φραγμένη.
Άρα $s_{2n} \to s \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$s_{2n-1} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-2}\right)+\frac{1}{2n-1} =$$

$$= s_{2(n-1)} + \frac{1}{2n-1} \longrightarrow s+0=s.$$

Αφού οι υπακολουθίες (s_{2n}) και (s_{2n-1}) της (s_n) συγκλίνουν στο ίδιο s, έχουμε $s_n \to s$.

Κριτήρια Σύγκρισης

ΘΕΩΡ. 3 (Κριτήριο σύγκρισης)
Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Υποθέτουμε ότι $b_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ και $\exists M>0 : |a_k| \leq M b_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Αν $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

Απόδ. Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ και $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \Rightarrow s_n \leq M t_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αν $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η (t_n) είναι άνω φραγμ., άρα και η $(s_n) \uparrow$ και άνω φραγμένη $\Rightarrow$ (s_n) συγκλίνει. ∎

ΘΕΩΡ. 4 (Οριακό κριτήριο σύγκρισης)
Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Υποθέτουμε ότι $b_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και ότι

$$\exists \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in \mathbb{R}.$$

Τότε, αν $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

Απόδ. Αν η $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$ συγκλίνει, τότε είναι φραγμένη.
Άρα $\exists M>0: \left|\frac{a_k}{b_k}\right| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists M>0: |a_k| \leq M \cdot |b_k| = M b_k \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

δηλ. ισχύουν οι υποθ. του Θεωρ. 3. ∎

ΘΕΩΡ. 5 (Κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς).
Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Υποθέτουμε ότι
$a_k, b_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και ότι

$$\exists \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell > 0.$$

Τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $\sum b_k$ συγκλίνει.

Απόδ. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, λόγω Θεωρ. 4.
Αντίστροφα, αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, θεωρούμε το $\lim \frac{b_k}{a_k} = 1/\ell$
και εφαρμόζουμε πάλι το Θ.4. ∎

Παραδείγματα
(1) Θεωρούμε την σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$\left|\frac{\sin(kx)}{k^2}\right| \leq 1 \cdot \frac{1}{k^2}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει,
η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ συγκλίνει απολύτως.

(2) Θεωρούμε την σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+k+2}$. Θέτουμε

$a_k = \frac{k+1}{k^3+k+2}$ και $b_k = \frac{1}{k^2}$. Τότε

$$\exists \lim \frac{a_k}{b_k} = 1 \in \mathbb{R}$$

Επειδή $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, από Θ4 ή Θ5 και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+k+2}$ συγκλίνει.

(3) Θεωρούμε την σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+2}$. Θέτουμε $a_k = \frac{k^2+1}{k^3+2}$ και $b_k = \frac{1}{k}$. Τότε

$$\exists \lim \frac{a_k}{b_k} = 1 > 0.$$

Από το Θ.5 (κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς), αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ αποκλίνει, η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+2}$ αποκλίνει.

(4) Θεωρούμε την σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{1+k^2} - k$. Θέτουμε

$$a_k = \frac{\sqrt{1+k^2}^2 - k^2}{\sqrt{1+k^2}+k} = \frac{1}{k+\sqrt{1+k^2}} \quad \text{και} \quad b_k = \frac{1}{k}. \quad \text{Τότε}$$

$$\exists \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{2} > 0 \quad \text{και} \quad \sum_{k=1} a_k$$

αποκλίνει από το Θ4.

(5) Θεωρούμε την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2}$. Παρατηρούμε ότι

$$|a_k| = \frac{\cos^2 k}{k^2} \leq \frac{1}{k^2} = b_k \quad \text{και} \quad \sum_{k=1} b_k \text{ συγκλίνει} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το Θ3.