Άσκ. 25 (Ακολουθίες)

$a_1=a,\ a_2=b\in\mathbb{R},\ a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n-1}}{2}$,

Δείχτηκε ότι (a_n) Cauchy. Ζητάμε το όριο.

Απαντ.

$2a_1=2a$ $\qquad\qquad\qquad x=\lim a_n$.

$$2a_2=2b$$
$$2a_3=a_2+a_1$$
$$2a_4=a_3+a_2$$
$$2a_5=a_4+a_3$$
$$2a_6=a_5+a_4$$
$$\vdots$$
$$2a_{n-2}=a_{n-3}+a_{n-4}$$
$$2a_{n-1}=a_{n-2}+a_{n-3}$$
$$2a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$

$$2a_1+2a_{n-1}+2a_n=2a+2b+a_1+a_{n-1}\Rightarrow$$

$$\underbrace{2a_{n-1}+2a_n}_{2x+2x}=2b+a+\underbrace{a_{n-1}}_{x}\Rightarrow 4x=2b+a+x\Rightarrow \boxed{x=\frac{2b+a}{3}}$$

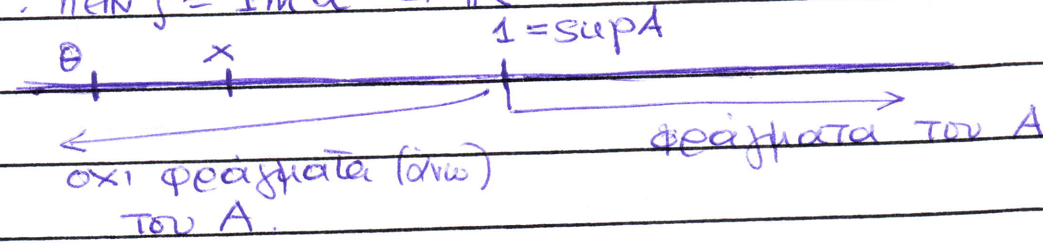
Ασκ. 27

$(a_n) : \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} = 1, \quad a_n \neq 1, \quad \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$\exists\, (a_{k_n}) \uparrow : a_{k_n} \to 1.$

Απόδ.

$A = \{a_n : n\in\mathbb{N}\} = \mathrm{Im}\,\alpha \subseteq \mathbb{R}$



$\forall\, \theta < 1$: θ όχι άνω φράγμα του A $\Rightarrow$

$\exists\, x\in A : \theta < x \leq 1.$

Όμως: $\forall\, x = a_n \in A : x \neq 1$. Άρα $\theta < x < 1$.

Παρατηρούμε ότι $\exists$ άπειρα τέτοια x: αν ήταν πεπερ., έστω $x_1, \dots, x_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \max\{x_1, \dots, x_n\} = \max A < 1 = \sup A$, άτοπο.

Παίρνω διαδοχικά:

$\theta_1 = 0 \Rightarrow \exists\, k_1 \in \mathbb{N} : \quad 0 < a_{k_1} < 1$

$\theta_2 = \max\{1/2, a_{k_1}\} \Rightarrow \exists\, k_2 > k_1 : \quad 1/2, a_{k_1} < a_{k_2} < 1$

$\vdots$

$\theta_n = \max\{1 - 1/n, a_{k_{n-1}}\} \Rightarrow \exists\, \underbrace{k_{n+1} > k_n}_{\Downarrow\ (a_{k_n})\text{ υπακολ.}} : \underbrace{1 - \frac{1}{n} < a_{k_{n+1}} < 1}_{\Downarrow\ a_{k_n} \to 1} \ \&\ \underbrace{a_{k_n} < a_{k_{n+1}}}_{\Downarrow\ (a_{k_n})\uparrow}$

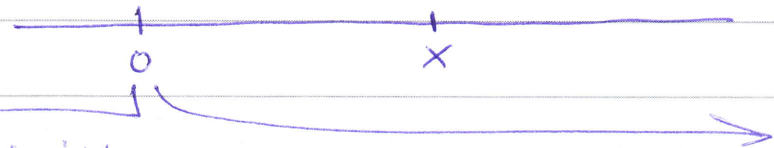
Άσκ. 28

$(a_n): a_n > 0,\ \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ a_{k_n} \downarrow\ :\ a_{k_n} \to 0.$

Απόδ.

Παρατηρούμε ότι $\forall\ x > 0\ \exists\ k \in \mathbb{N}:\ 0 < a_k < x$



κάτω φράγμα του $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

όχι κάτω φράγμα του A.

$\exists$ άπειρα τέτοια $k \in \mathbb{N}$: αν ήταν πεπερασμένα $k_1, \dots, k_n \Rightarrow$

$\min\{a_{k_i} : i = 1, \dots, n\} = \min\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, άτοπο.

Παίρνουμε διαδοχικά:

$x_1 = 1 \Rightarrow \exists\ k_1 \in \mathbb{N}:\ 0 < a_{k_1} < x_1$

$x_2 = \min\{1/2, a_{k_1}\} \Rightarrow \exists\ k_2 > k_1:\ 0 < a_{k_2} < \dots$

$\vdots$

$x_n = \min\{1/n, a_{k_{n-1}}\} \Rightarrow \exists\ \underbrace{k_n > k_{n-1}}_{\Downarrow}:\ \underbrace{0 < a_{k_n} < x_n}_{\Downarrow} = \min\{1/n, a_{k_{n-1}}\}$

(a_{k_n}) υπακολ.

$0 < a_{k_n} < 1/n$ $\qquad$ $a_{k_n} < a_{k_{n-1}}$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$0 \qquad 0 \qquad\qquad (a_{k_n}) \downarrow$

$\Downarrow$

$a_{k_n} \to 0$

Ασκ 29.

Δίνεται ακολουθία:

$a_0 = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}, \quad a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Να βρεθούν τα οριακά σημεία της (a_n).

Λύση. Υπολογίζουμε: $a_0 = 0$ $\quad a_1 = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{1}{4}$ $\quad a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$a_4 = \frac{3}{8}$ $\quad a_5 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

Υπακολ. άρτιων:

$$a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + a_{2n-2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} a_{2(n-1)}.$$

$a_2 > a_0$

$a_{2(n+1)} > a_{2n} \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} a_{2(n+1)} > \frac{1}{4} + \frac{1}{2} a_{2n} \Rightarrow a_{2(n+2)} > a_{2(n+1)}.$

Άρα $(a_{2n}) \uparrow$.

$a_0, a_2, a_4 < 1/2$.

$a_{2n} < 1/2 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} a_{2n} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$

Άρα (a_{2n}) άνω φραγμένη από $1/2$.

Επομένως η (a_{2n}) συγκλίνει σε $x \in \mathbb{R}$ με

$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} x \Rightarrow 4x = 1 + 2x \Rightarrow x = 1/2.$

Υπακολ. περιττών:

$$a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n} = \frac{1}{2} + \frac{a_{2n-1}}{2} = \frac{1}{2}(1 + a_{2n-1}).$$

$a_1 < a_3 < a_5$

$a_{2n-1} < a_{2n+1} \Rightarrow \frac{1}{2}(1+a_{2n-1}) < \frac{1}{2}(1+a_{2n+1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{2n+1} < a_{2n+3}$.

Άρα $(a_{2n-1}) \uparrow$.

$a_1, a_3, a_5 < 1$.

$a_{2n-1} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(1+a_{2n-1}) < \frac{1}{2}(1+1) = 1$.

Άρα η (a_{2n-1}) είναι άνω φραγμ. από 1.

Επομένως η (a_{2n-1}) συγκλίνει σε $y \in \mathbb{R}$, με

$y = \frac{1}{2}(1+y) \Rightarrow 2y = 1+y \Rightarrow y = 1$.

Αφού $a_{2n} \to 1/2$ και $a_{2n-1} \to 1$, έχουμε $K = \{1/2, 1\}$.

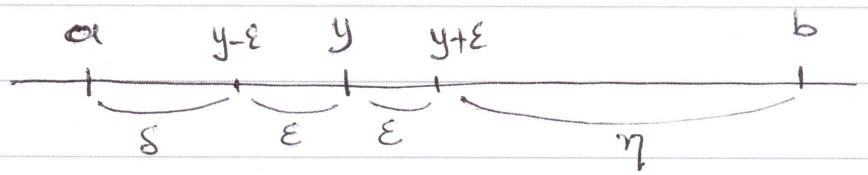
Ιδιαιτέρως: $\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = 1/2$.

Υπενθ: Πώς εξηγούμε ότι $\nexists$ άλλα οριακά σημεία;

Άσκ. 30

Έστω (x_n) με $x_{n+1} - x_n \to 0$ και $a < b$ οριακά σημεία.
Νδο κάθε $y \in [a,b]$ είναι οριακό.

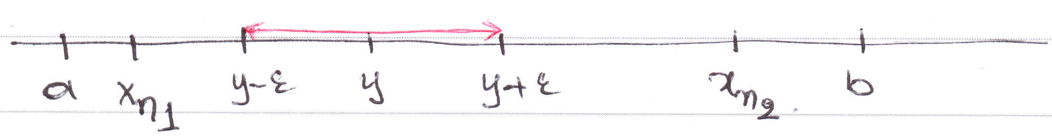
Απόδ. Με άτοπο: έστω $y \in (a,b)$, όχι οριακό.



Υπενθ: y οριακό $\iff \forall \varepsilon > 0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n > m : |x_n - y| < \varepsilon$.
Άρα: y όχι οριακό $\iff \exists \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m : |x_n - y| > \varepsilon$.
Μπορούμε να μικρύνουμε το ε : $a < y - \varepsilon < y + \varepsilon < b$.

$x_{n+1} - x_n \to 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon$.
Άρα $\forall n \geq n_0$ οι διαδοχικοί όροι x_{n+1} και x_n δεν μπορούν να βρεθούν ο ένας στο $(a, y-\varepsilon)$ και ο άλλος στο $(y+\varepsilon, b)$.

Όμως: a ορ. σημ. $\Rightarrow$ για $\delta = y - \varepsilon - a > 0$ και $N = \max\{m, n_0\} \in \mathbb{N}$
$\exists n_1 > N : x_{n_1} < a + \delta = y - \varepsilon$.
b ορ. σημ. $\Rightarrow$ για $\eta = b - (y+\varepsilon) > 0$ και $n_1 \in \mathbb{N}$
$\exists n_2 > n_1 : x_{n_2} > b - \eta = y + \varepsilon$.



Θεωρούμε τους όρους $x_{n_1}, x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots, x_{n_2}$. Πού βρίσκονται αυτοί; Στο $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ δεν υπάρχει κανείς.
Αν $s = \max\{n_1 + k : 0 \leq k \leq n_2 - n_1$ και $x_{n_1+k} \in (a, y-\varepsilon)\}$,
τότε $x_s \in (a, y-\varepsilon)$ ενώ $x_{s+1} \in (y+\varepsilon, b)$, άτοπο γιατί