ΜΑΘΗΜΑ 4

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ CAUCHY / ΒΑΣΙΚΕΣ

ΟΡΣ. Μια (a_n) λέγεται ακολουθία Cauchy ή βασική ακολουθία, αν:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$

Παρατηρήσεις.

(1) ΠΡΟΣΟΧΗ! Έστω (a_n) βασική και $\varepsilon > 0$. Από τον ορσ. $\Rightarrow$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ και $m = n_0 : |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon.$

Η προηγούμενη σχέση μοιάζει να σημαίνει $a_n \to a_{n_0}$
ΑΛΛΑ ΑΥΤΟ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ. Γιατί;; Διότι το a_{n_0} αλλάζει με το n_0, που αλλάζει με το ε!

(2) Αν (a_n) βασική, από τον ορσ. προκύπτει ότι

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon.$ (*)

Η (*) είναι απλούστερη, αλλά δεν μπορεί να αντικαταστήσει την σχέση του ορσ. Δηλ: ορσ $\Rightarrow$ (*) αλλά (*) $\not\Rightarrow$ ορσ.

Πράγματι: για $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$, άρα

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon.$

Όμως:

$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} : n_0, n_0 + m \geq n_0$ και

$$|a_{n_0+m} - a_{n_0}| = \frac{1}{\sqrt{n_0+1}} + \frac{1}{\sqrt{n_0+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n_0+m}} \geq \frac{m}{\sqrt{n_0+m}} =$$

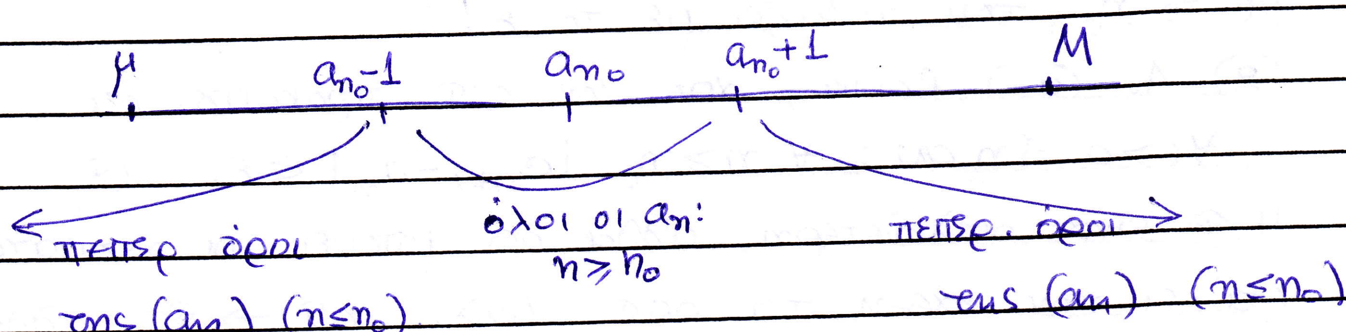
$$= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\frac{n_0}{m} + 1}} \xrightarrow{m \to \infty} +\infty,$$ άρα (a_n) όχι βασική.

Πρόταση 1 $\quad a_n \to a \in \mathbb{R} \Rightarrow (a_n)$ βασική.

Απόδ. Έστω $\varepsilon>0$. Από $a_n \to a$, για το $\varepsilon/2>0$
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_0 \ \ |a_n-a|<\varepsilon/2$.
Οπότε $\forall\, n, m \geq n_0$:
$|a_n-a_m| \leq |a_n-a|+|a_m-a| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$. ∎

Πρόταση 2. $\quad (a_n)$ βασική $\Rightarrow (a_n)$ φραγμένη.

Απόδ. Έστω (a_n) βασική και $\varepsilon=1>0$. Τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:
$|a_n-a_{n_0}|<1, \ \forall\, n \geq n_0$
(εφαρμογή του ορισ. για $n \geq n_0$ και $m=n_0$).



Θέτουμε: $\quad \mu = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, a_{n_0}-1\}$

$$M = \max\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}, a_{n_0}+1\}.$$

Τότε μ, M είναι κάτω, άνω φράγματα της (a_n), αντίστοιχα:
$\forall\, n \geq n_0: \quad \mu \leq a_{n_0}-1 \leq a_n \leq a_{n_0}+1 \leq M$,
ενώ για $n=1,2,\ldots,n_0-1$

$$\mu \leq a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1} \leq M.$$ ∎

ΘΕΩΡ. (a_n) βασική $\Leftrightarrow$ (a_n) συγκλίνουσα.

Απόδ. $(\Leftarrow)$ Βλ. Πρόταση 1.

$(\Rightarrow)$ Έστω (a_n) βασική. Από Πρόταση 2, είναι φραγμ.

$\overset{BW}{\Rightarrow} \exists\, a_{k_n} \to a \in \mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Για το $\varepsilon/2 > 0$:

$a_{k_n} \to a \Rightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_1 \ \ |a_{k_n} - a| < \varepsilon/2$.

(a_n) βασική $\Rightarrow \exists\, n_2 \in \mathbb{N} : \forall\, m, n \geq n_2 : |a_m - a_n| < \varepsilon/2$.

Θέτω $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$.

Έστω $n \geq n_0 \Rightarrow k_n \geq n \geq n_0 \geq n_1, n_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |a_n - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. ■

Παρατ. Η συνθήκη του Cauchy μας επιτρέπει νδο μια (a_n) είναι συγκλίνουσα, χωρίς να γνωρίζουμε το όριο της.