# ΜΑΘΗΜΑ 2

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ BW / ΟΡΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ.

Τα επόμενα 2 αποτελέσματα είναι εφαρμογές του ΘBW:

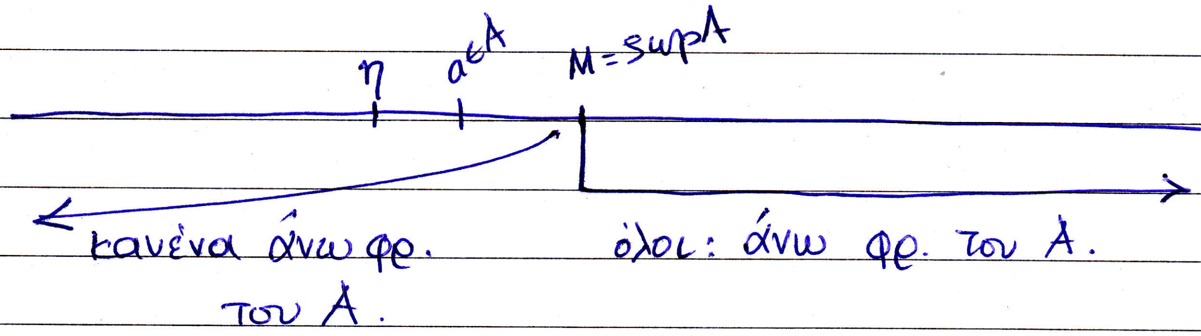
**ΘΕΩΡ.** $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ $f$ φραγμένη.

**Απόδ.** Με άτοπο: Έστω $f$ όχι φραγμένη $\Rightarrow$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$: $n$ όχι φράγμα της $|f(x)|$, $x \in [a,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \exists x_n \in [a,b] : |f(x_n)| > n.$
$\Rightarrow \forall$ υπακολουθία $(x_{k_n})$: $|f(x_{k_n})| > k_n \geq n$
Δηλ. η ακολουθία των εικόνων $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη και δεν έχει καμμία φραγμένη υπακολουθία.
Όμως $x_n \in [a,b] \Rightarrow (x_n)$ φραγμ. $\overset{BW}{\Longrightarrow}$
$\Rightarrow \exists\, x_{k_n} \to x \in [a,b] \Rightarrow$ ($f$ συνεχής)
$\Rightarrow f(x_{k_n}) \to f(x) \Rightarrow (f(x_{k_n}))$ φραγμ., άτοπο. ∎

**Πόρισμα** $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλ. $\exists\, \xi_1, \xi_2 \in [a,b] : f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2)$, $\forall x \in [a,b]$.

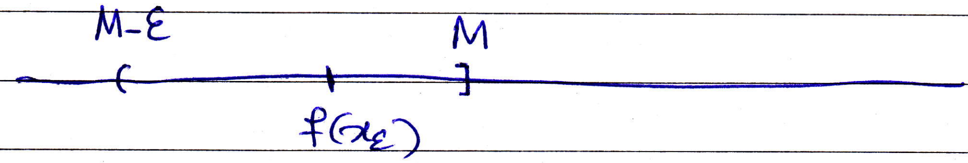
**Υπενθύμιση:** $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμ. $\Rightarrow \exists \sup A = M \in \mathbb{R}$.

Το $M = \sup A$ χωρίζει το $\mathbb{R}$ σε δύο ημιάξονες:
τον ανοιχτό $(-\infty, M)$ και τον κλειστό $[M, +\infty)$:
κάθε $\xi \in [M, +\infty)$ είναι άνω φρ. του $A$.
κάθε $\eta \in (-\infty, M)$ δεν είναι άνω φρ. του $A$.




<u>Αποδ. Πορίσματος.</u> $f([a,b]) \neq \emptyset$, φραγμ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, M = \sup f([a,b]) \in \mathbb{R}$. ΘΔο $M \in f([a,b])$.

$\forall \varepsilon > 0 : M-\varepsilon < M \Rightarrow M-\varepsilon$ όχι άνω φρ. του $f([a,b]) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists\, x_\varepsilon \in [a,b] : \ M-\varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq M \Rightarrow$




$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \exists\, x_n \in [a,b] : \ \underset{\downarrow \atop M}{M - 1/n} < f(x_n) \leq \underset{\downarrow \atop M}{M} \Rightarrow f(x_n) \to M.$

$(x_n)$ φραγμ. $\xRightarrow{BW}$ $\exists$ συγκλίνουσα $x_{k_n} \to \xi_2 \in [a,b] \xRightarrow[\text{συν.}]{f}$
$\Rightarrow \underset{\swarrow \atop M}{f(x_{k_n})} \longrightarrow f(\xi_2) \Rightarrow M = f(\xi_2) \in f([a,b])$. ■

<u>ΟΡΣ 1.</u> Έστω $(a_n)$ ακολουθία. Λέμε ότι ο $x \in \mathbb{R}$ είναι <u>οριακό σημείο</u> ή <u>υπακολουθιακό όριο</u> της $(a_n) \Leftrightarrow$
$\exists$ υπακολουθία $(a_{k_n}) : \ a_{k_n} \longrightarrow x$.

Π.χ.: $1, -1$ οριακά σημεία της $a_n = (-1)^n$.

Λήμμα 1 $x$ οριακό σημείο της $(a_n) \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall m \in \mathbb{N} \ \exists n \geq m : |a_n - x| < \varepsilon$.

Απόδ. ($\Rightarrow$) $x$ οριακό σημείο $\Rightarrow \exists a_{k_n} \to x$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Τότε $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$:

$|a_{k_n} - x| < \varepsilon$.

Θέτω $n_1 = \max\{n_0, m\} \Rightarrow k_{n_1} \geq n_1 \geq m$ και

$k_{n_1} \geq n_1 \geq n_0 \Rightarrow |a_{k_{n_1}} - x| < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Παίρνω $\varepsilon = 1$, $m = 1 \Rightarrow \exists k_1 \geq 1 : |a_{k_1} - x| < 1$

$\varepsilon = 1/2$, $m = k_1 + 1 \Rightarrow \exists k_2 \geq k_1 + 1 : |a_{k_2} - x| < 1/2$

και επαγωγικά

$$\varepsilon = 1/n, \quad m = k_{n-1} + 1 \Rightarrow \exists \underbrace{k_n \geq k_{n-1} + 1}_{\Downarrow \ (a_{k_n}) \text{ υπακολ.}} : \underbrace{|a_{k_n} - x| < 1/n}_{\Downarrow \ a_{k_n} \to x} \quad \blacksquare$$

Έστω τώρα $(a_n)$ φραγμένη $\Rightarrow \exists M > 0 : -M \leq a_n \leq M$.

BW $\Rightarrow \exists$ οριακά σημεία της $(a_n) \Rightarrow$

$\emptyset \neq K = \{\text{οριακά σημεία της } (a_n)\} \subseteq [-M, M] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \sup K, \inf K \in \mathbb{R}$.

Λήμμα 2 Αν $(a_n)$ φραγμένη, $K = \{\text{οριακά σημεία της } (a_n)\}$

$\Rightarrow \inf K, \sup K \in K$.

Αποδ. Έστω $a = \sup K$. Θδο $a \in K$. Αρκεί νδο το $a$ είναι οριακό σημείο της $(a_n)$. Άρα (βλ. προηγ. λήμμα) αν δο
$\forall \varepsilon > 0 \ \forall m \in \mathbb{N} \ \exists n \geq m : |a_n - a| < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$.

$a = \sup K$, $a - \varepsilon/2 < a \Rightarrow \exists x \in K : a - \varepsilon/2 < x \leq a$.

$x$ οριακό σημείο της $(a_n) \Rightarrow$ (προηγ. λήμμα).

για $\varepsilon/2 > 0$ και $m \in \mathbb{N}$ $\exists n \geq m : |a_n - x| < \varepsilon/2$.

Άρα:

$|a_n - a| \leq |a_n - x| + |x - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Παρόμοια, $b = \inf K \in K$. ∎

ΟΡΣ 2. Έστω $(a_n)$ φραγμ., $K = \{$οριακά σημεία της $(a_n)\}$.
Ονομάζουμε ανώτερο όριο / limes superior της $(a_n)$ το

$$\limsup a_n = \sup K$$

και κατώτερο όριο / limes inferior της $(a_n)$ το

$$\liminf a_n = \inf K.$$

Προσοχή! $\limsup a_n \neq \sup(a_n)$.

Π.χ. $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

$\sup(a_n) = \max(a_n) = a_1 = 1$.

Όμως $a_n \to 0$, άρα κάθε $a_{k_n} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow K = \{0\}$ και $\limsup a_n = 0$.

Για την συγκεκριμένη ακολουθία ισχύει

$$\limsup a_n < a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$