ΜΑΘΗΜΑ 1

ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ – ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

Γνωρίζουμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μιά απεικόνιση $\alpha: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Σχηματικά:

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
$\alpha \downarrow$													
$\mathbb{R}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	…

Ας επιλέξουμε κάποιους (άπειρους) όρους της (a_n) πετώντας τους υπόλοιπους:

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
$\alpha \downarrow$													
$\mathbb{R}$	a_1	$\cancel{a_2}$	$\cancel{a_3}$	a_4	$\cancel{a_5}$	a_6	a_7	a_8	$\cancel{a_9}$	$\cancel{a_{10}}$	a_{11}	$\cancel{a_{12}}$	…

Αν ξαναγράψω τους όρους που κράτησα (με την ίδια σειρά) παίρνω:

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\beta \downarrow$										
$\mathbb{R}$	a_1	a_4	a_6	a_7	a_8	a_{11}	…			
	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$				
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6				

δηλ. μια νέα ακολουθία. Παρατηρούμε ότι η

Παρατηρούμε ότι η αντιστοίχιση των δεικτών

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$k \downarrow$									
$\mathbb{N}$	1	4	6	7	8	11	...		

είναι μια $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \uparrow$. Η διαδικασία αυτή (επιλογή όρων μιας ακολουθίας, που τους καταγράφουμε με την ίδια σειρά) μας οδηγεί στον επόμενο ορισμό:

<u>ΟΡΣ 1.</u> Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Μια ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται υπακολουθία της (a_n) αν $\exists\, k: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \uparrow$ με $b_n = a_{k_n}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, δηλ:

$$b = \alpha \circ k$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right, "b"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

<u>Παραδείγματα</u> (1) Η (a_n): $k = id_{\mathbb{N}}$.

(2) Η υπακολουθία των άρτιων όρων (a_{2n}): $k(n) = 2n$.

(3) Η υπακολουθία των περιττών όρων (a_{2n-1}): $k(n) = 2n-1$.

(4) Η (a_{n^2}): $k(n) = n^2$

(5) Η (a_{3n}): $k(n) = 3n$

(6) Κάθε τελικό τμήμα: $(a_{m+n})_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $m\in\mathbb{N}$ σταθ.
Τότε $k(n) = n+m$.

ΛΗΜΜΑ. $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \uparrow \Rightarrow k(n) = k_n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Αποδ. Επαγωγικά: $k(1) \in \mathbb{N} \Rightarrow k(1) \geq 1$.

Έστω $k(n) \geq n$. Τότε:

$$\underset{(k\uparrow)}{k(n+1) > k_n} \geq n \Rightarrow \underset{\mathbb{N}}{k_{n+1}} \overset{?}{>} n \Rightarrow k_{n+1} \geq n+1. \blacksquare$$

Συμπεράσματα: Έστω $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \uparrow$. Τότε:

(1) $k_n \to +\infty$

(2) Αν μια ακολουθία (a_n) έχει τελικά την ιδιότητα (Ι), δηλ. a_n έχει (Ι) $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, τότε κάθε υπακολουθία $(b_n = a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ έχει τελικά την (Ι):

$\forall n \geq n_0: k_n \geq n \geq n_0$.

Θα συσχετίσουμε την συμπεριφορά μιας ακολουθίας με την συμπεριφορά των υπακολουθιών της.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω (a_n) ακολουθία και (b_n) υπακολουθία της $(b_n = a_{k_n},\ k: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \uparrow)$. Τότε:

(1) $a_n \to a \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n \to a \in \mathbb{R}$.

$a_n \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$

$a_n \to -\infty \Rightarrow b_n \to -\infty$.

(2) (a_n) φραγμένη $\Rightarrow$ (b_n) φραγμένη

(3) (a_n) (γνησίως) μονότονη $\Rightarrow$ (b_n) (γν.) μονότονη.

Αποδ (1) Εστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $a_n \to a$, $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$\forall\, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow$

$\forall\, n \geq n_0 : k_n \geq n \geq n_0$ και $|a_{k_n} - a| < \varepsilon \Rightarrow$

$\forall\, n \geq n_0 : |b_n - a| < \varepsilon$.

Άρα $b_n \to a$.

(2) (a_n) φραγμένη $\Rightarrow$

$\exists\, \mu, M \in \mathbb{R} : \mu \leq a_n \leq M,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\exists\, \mu, M \in \mathbb{R} : \mu \leq b_n = a_{k_n} \leq M,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

(b_n) φραγμένη.

(3) Εστω $(a_n) \uparrow$. Τότε $n > m \Rightarrow a_n \geq a_m$.

Οπότε: $n > m \underset{k\uparrow}{\Rightarrow} k_n > k_m \Rightarrow a_{k_n} \geq a_{k_m} \Rightarrow$

$\Rightarrow b_n \geq b_m$ και $(b_n) \uparrow$. ∎

Ερώτηση 1: Η προηγούμενη πρόταση ισχύει για τις "καλές" ιδιότητες. Ισχύει και για τις αντίστοιχες "κακές";

Δηλ: $a_n \not\to a \overset{?}{\Rightarrow} b_n \not\to a$

(a_n) όχι φραγμένη $\overset{?}{\Rightarrow}$ (b_n) όχι φραγμένη

(a_n) όχι μονότονη $\overset{?}{\Rightarrow}$ (b_n) όχι μονότονη

Η απάντηση είναι ΟΧΙ! Βρείτε αντιπαραδείγματα.

Γιατί οι καλές κληρονομούνται και οι κακές όχι;;

Ερώτηση 2: Μπορούμε από ("καλές") ιδιότητες των υπακολουθιών να συμπεράνουμε τις αντίστοιχες για την ακολουθία; Δηλ. ισχύει κάποιο είδος "αντίστροφου" της προηγ. Πρότασης;

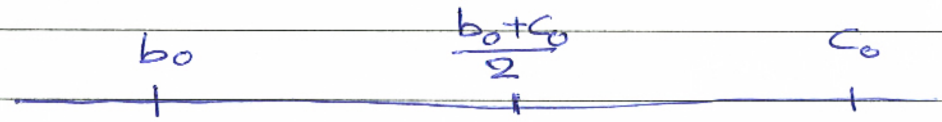
ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-WEIERSTRASS

Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μία υπακολουθία που συγκλίνει (σε πραγματικό αριθμό).

Απόδειξη Α [με την Αρχή του Κιβωτισμού].

(a_n) φραγμ. $\Rightarrow \exists\, b_0 \le c_0 : a_n \in [b_0, c_0]\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Χωρίζουμε το $[b_0, c_0]$ στη μέση, δηλ. στα $[b_0, \frac{b_0+c_0}{2}]$ και $[\frac{b_0+c_0}{2}, c_0]$:



Τουλάχιστον στο ένα από τα δύο διαστήματα ανήκουν άπειροι όροι της (a_n), έστω στο $[b_1, c_1]$. Χωρίζουμε το $[b_1, c_1]$ στη μέση και συνεχίζουμε με ίδιο τρόπο....

Έτσι παίρνουμε ακολουθία διαστημάτων $[b_n, c_n]$, $n \ge 0$, με τις ιδιότητες:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ [b_{n+1}, c_{n+1}] \subseteq [b_n, c_n] \\ (2)\ c_n - b_n = \dfrac{c_0 - b_0}{2^n} \to 0 \end{array}\right\} \overset{\text{ΑΚ}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \exists!\, a \in \mathbb{R} : \\ a \in [b_n, c_n]\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{και} \\ b_n \to a,\ c_n \to a. \end{array}\right.$$

(3) $\exists$ άπειροι όροι της (a_n) στο $[b_n, c_n]$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $\forall m, n \in \mathbb{N}\ \exists\, k > m : a_k \in [b_n, c_n]$.

(Πράγματι: για δεδομένα $m, n \in \mathbb{N}$, αν όλοι οι όροι $a_k \in [b_n, c_n]$ είχαν $k \le m$, θα ήταν πεπερασμένο πλήθος, άτοπο.)

Επομένως:

Διαλέγω $a_{k_1} \in [b_1, c_1]$.

— " — $a_{k_2} \in [b_2, c_2]$ με $k_2 > k_1$

και επαγωγικά

— " — $a_{k_n} \in [b_n, c_n]$ με $k_n > k_{n-1}$ $\Rightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow b_n \leq a_{k_n} \leq c_n$, με (a_{k_n}) υπακολουθία της (a_n), αφού $(k_n) \uparrow$. ∎

$b_n \to a$, $a_{k_n} \to a$, $c_n \to a$

Για την 2η απόδειξη του Θ. BW χρειαζόμαστε ακόμη μια έννοια:

<u>ΟΡΙΣ 2.</u> Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Λέμε ότι ο όρος a_m είναι σημείο κορυφής (σ.κ.) της (a_n), αν

$$a_m \geq a_n \quad , \quad \forall n \geq m,$$

δηλ. αν ο a_m είναι μεγαλύτερος (ή ίσος) από όλους τους επόμενους όρους.

Π.χ.: (1) $(a_n) \downarrow \Rightarrow$ κάθε a_m είναι σ.κ.

(2) $(a_n) \uparrow \Rightarrow \nexists$ σ.κ.

(3) $a_n = (-1)^n \Rightarrow$ όλοι οι άρτιοι όροι a_{2n} είναι σ.κ.

Χρειαζόμαστε και σαν "λήμμα" ένα αποτέλεσμα που είναι τόσο σημαντικό, ώστε είναι θεώρημα:

ΘΕΩΡ. Κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μία μονότονη υπακολουθία.

Απόδ. Έστω (a_n) ακολουθία. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

(1) Έχει άπειρα σ.κ. $\Rightarrow$

διαλέγουμε ένα, το a_{k_1},

—"— a_{k_2} με $k_2 > k_1$

και επαγωγικά

—"— $a_{k_{n+1}}$ με $k_{n+1} > k_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Επειδή $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots \Rightarrow$

(a_{k_n}) είναι υπακολουθία της (a_n).

Επειδή τα a_{k_n} είναι σ.κ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \dots \geq a_{k_n} \geq a_{k_{n+1}} \geq \dots$

δηλ. $(a_{k_n}) \downarrow$.

(2) Έχει πεπερασμένα σ.κ. $\Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N}$: a_n δεν είναι σ.κ., $\forall n \geq N$.

Θέτω: $k_1 = N \Rightarrow a_{k_1}$ όχι σ.κ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ k_2 > k_1 : a_{k_2} > a_{k_1}$ και a_{k_2} όχι σ.κ

$\Rightarrow \exists\ k_3 > k_2 : a_{k_3} > a_{k_2}$ και a_{k_3} όχι σ.κ

και επαγωγικά

$\dots \Rightarrow \underbrace{\exists\ k_{n+1} > k_n}_{\Downarrow} : \underbrace{a_{k_{n+1}} > a_n}_{\Downarrow}$ και $a_{k_{n+1}}$ όχι σ.κ.

(a_{k_n}) υπακολ. της (a_n) $\qquad (a_{k_n}) \uparrow$ ∎

ΘBW, Απόδειξη Β. Έστω (a_n) φραγμένη $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ υπακολουθία (a_{k_n}) μονότονη (+ φραγμ.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (a_{k_n})$ συγκλίνουσα. ∎