Ομοιόμορφη συνέχεια - Συμπλήρωμα

Α. Κριτήρια για ομοιόμορφη συνέχεια

Ι. Συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε φραγμένο διάστημα

1. Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[a, b]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής (Θεώρημα 3.3.1).

2. Μία συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα (a, b) (ή $(a, b]$ ή $[a, b)$) είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν η f μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή συνάρτηση στο $[a, b]$, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχουν (στο $\mathbb{R}$) τα όρια $\lim_{x\to a^+} f(x)$ και $\lim_{x\to b^-} f(x)$ (Θεώρημα 3.3.3).

ΙΙ. Συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε ημιευθεία ή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$

1. Κάθε Lipschitz συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής (Πρόταση 3.1.3). Ειδικότερα, αν η f είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι φραγμένη, τότε η f είναι Lipschitz συνεχής και κατά συνέπεια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση (Πρόταση 3.1.4).

2. Αν η συνάρτηση $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής (Άσκηση 9α Σημειώσεων). Το αντίστοιχο ισχύει για συναρτήσεις ορισμένες σε διαστήματα της μορφής $(-\infty, a]$.

3. Το άθροισμα δύο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση (Άσκηση 7α Σημειώσεων).

4. Το γινόμενο δύο **φραγμένων** και ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση (Άσκηση 7β Σημειώσεων).

5. Η σύνθεση δύο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση (Άσκηση 6 Σημειώσεων ή 1(vii) Φυλλαδίου).

6. Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, $f : I \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και a εσωτερικό σημείο του I. Αν η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο σύνολο $A = \{x \in I : x \leq a\}$ και ομοιόμορφα συνεχής στο σύνολο $B = \{x \in I : x \geq a\}$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I (Άσκηση 7α Φυλλαδίου). Για παράδειγμα, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και, για κάποιο $a \in \mathbb{R}$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, a]$ και ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Οι Προτάσεις ΙΙ. 1-5 δίνουν ικανές, αλλά όχι αναγκαίες συνθήκες για την ομοιόμορφη συνέχεια, επομένως εφαρμόζονται στην περίπτωση που θέλουμε να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι μία δεδομένη συνάρτηση **δεν** είναι ομοιόμορφα συνεχής, χρησιμοποιούμε συνήθως ένα από τα ακόλουθα:

7. Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν, για κάθε ζευγάρι ακολουθιών (x_n), (y_n) στο A με $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, ισχύει $\lim_{n\to\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$ (Θεώρημα 3.2.1).
Αυτό σημαίνει ότι, για να δείξουμε ότι μία συνάρτηση f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, αρκεί να βρούμε ένα ζευγάρι ακολουθιών (x_n), (y_n) στο A με $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, για το οποίο η ακολουθία των διαφορών $(f(x_n) - f(y_n))$ δεν τείνει στο 0.

8. Αν η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα I, τότε υπάρχουν σταθερές $A, B > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A|x| + B$, για κάθε $x \in I$ (Άσκηση 10 Σημειώσεων).
Επομένως, αν αποδείξουμε ότι μία δεδομένη συνάρτηση f δεν κυριαρχείται από συνάρτηση της μορφής $y = A|x| + B$, τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε για παράδειγμα να αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = x^a$, με $a > 1$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $[0, +\infty)$.

9. Αν η συνάρτηση $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής (Άσκηση 3 Φυλλαδίου).
Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει όταν $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$ ή όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι της μορφής $(-\infty, a]$.

Στις εξετάσεις μπορείτε να χρησιμοποιείτε οποιοδήποτε από τα παραπάνω κριτήρια όταν εξετάζετε μια συνάρτηση ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια. Θα πρέπει όμως να ξέρετε και τις αποδείξεις τους, γιατί και αυτές μπορεί να ζητηθούν.

B. Παραδείγματα για τη σύγκριση της ομοιόμορφης συνέχειας με τη Lipschitz συνέχεια

Τα παρακάτω παραδείγματα απαντούν σε κάποιες ερωτήσεις που προέκυψαν κατά τη διάρκεια του 3ου Εργαστηρίου.

Θυμηθείτε κατ' αρχάς ότι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι Lipschitz συνεχής αν και μόνο αν η παράγωγός της είναι φραγμένη (Άσκηση 3 Σημειώσεων).

1. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, αλλά όχι Lipschitz συνεχής στο $[0, 1]$, αφού έχει μη φραγμένη παράγωγο στο $(0, 1]$.

2. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}\sin(x^3)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, αλλά όχι Lipschitz συνεχής στο $[1, +\infty)$. Για την απόδειξη της ομοιόμορφης συνέχειας μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο ΙΙ.2, αφού $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Το ότι δεν είναι Lipschitz συνεχής προκύπτει από το γεγονός ότι η παράγωγός της δεν είναι φραγμένη.

3. Οι συναρτήσεις $g(x) = \sin x + \frac{1}{x}\sin(x^3)$ και $h(x) = x + \frac{1}{x}\sin(x^3)$, είναι παραλλαγές της προηγούμενης, με την επιπλέον ιδιότητα για την g ότι δεν έχει όριο στο $+\infty$ και για την h ότι $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g φαίνονται στο αρχείο "Ομοιόμορφη συνέχεια - Σχήματα".

4. Το Θεώρημα του Rademacher, το οποίο μπορεί να δείτε σε ένα μάθημα Θεωρίας Μέτρου, λέει ότι κάθε Lipschitz συνεχής συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε πολλά σημεία (η ακριβής διατύπωση είναι: "σχεδόν παντού παραγωγίσιμη"). Από την άλλη μεριά, υπάρχουν ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις, για παράδειγμα η συνάρτηση του Weierstrass στο $[0, 1]$, οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε κανένα σημείο.

Γ. Βασικές ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

Σημειώσεις: Ασκήσεις 2 - 22

Φυλλάδιο: Ασκήσεις 1,2,3,5,7α