

## Απειροστικός Λογισμός II

Εαρινό Εξάμηνο 2019 - 20

5η Σειρά Ασκήσεων

### Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού Μέθοδοι ολοκλήρωσης

1. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα

$$g(x) = 1 + \int_0^x g(t) dt$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Βρείτε την  $g$ .

2. Αποδείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο  $[a, b]$  που ικανοποιούν τη σχέση

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x f^2(t) dt$$

για κάθε  $x \in [a, b]$ .

3. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών. Τα περισσότερα προκύπτουν χρησιμοποιώντας αθροίσματα Riemann κατάλληλων συναρτήσεων. Υπάρχει όμως ανάμεσά τους ένα μαύρο πρόβατο, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί με άλλη μέθοδο.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^{2n}}}{n} & \quad \text{(ii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ \text{(iii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) & \quad \text{(iv)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2} \right) \\ \text{(v)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) & \end{aligned}$$

4. (α) Δίνεται διάστημα  $[a, b]$ ,  $x_0 \in [a, b]$  και συνάρτηση  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \neq x_0$  και  $f(x_0) = c \neq 0$ . Χρησιμοποιώντας τα θεμελιώδη θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού, δείξτε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει παράγουσα στο  $[a, b]$ .

(β) Εξετάστε αν υπάρχει συνάρτηση  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , το αόριστο ολοκλήρωμα της οποίας ισούται με τη συνάρτηση  $g(x) = \sqrt{x}$ .

5. Έστω  $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής και αύξουσα. Δείξτε ότι η  $G : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt$$

είναι αύξουσα.

6. Ορίζουμε  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$G(x) = \int_0^x e^t \cos(x-t) dt.$$

Βρείτε τον τύπο της  $G$ .

7. Ορίζουμε  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Δείξτε ότι η  $f$  είναι σταθερή με δύο τρόπους:

(α) Υπολογίζοντας την παράγωγό της.

(β) Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα.

8. (α) Έστω  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0.$$

(β) Έστω  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \int_0^1 x^{n-1} f(x) dx \right) = f(1).$$

9. (α) Έστω  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_0^\infty f(x) dx$  είναι πεπερασμένο. Δείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

(β) Βρείτε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , με την ιδιότητα το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_0^\infty f(x) dx$  να είναι πεπερασμένο, αλλά η  $f$  να μην έχει όριο στο  $+\infty$ . (Δεν χρειάζεται να δώσετε τύπο για την  $f$ , μπορείτε απλώς να την περιγράψετε.)

10. Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{\sin(2kx)}{\sin x}$  επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση στο  $[0, \pi]$ . Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι, για κάθε ακέραιο  $k$ , ισχύει

$$\int_0^\pi \frac{\sin(2kx)}{\sin x} dx = 0.$$

11. Αποδείξτε ότι, για κάθε πολυώνυμο βαθμού  $n$ , ισχύει

$$\int e^{-x} p(x) dx = -e^{-x} \cdot [p(x) + p'(x) + \dots + p^{(n)}(x)] + c$$

12. Βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος  $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ , για κάθε τιμή του  $n \in \mathbb{N}$ .

13. (α) Αποδείξτε ότι, για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , υπάρχουν ακέραιοι  $a_n$  και  $b_n$  ώστε να ισχύει

$$\int_0^1 x^n e^x dx = a_n \cdot e + b_n$$

(β) Θυμηθείτε ότι στο 2ο Κεφάλαιο αποδείξαμε ότι ο αριθμός  $e$  είναι άρρητος. Χρησιμοποιώντας το (α) και την Άσκηση 8(α), δώστε μια διαφορετική απόδειξη αυτού του αποτελέσματος.