Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Εαρινό Εξάμηνο 2019 - 20

3η Σειρά Ασκήσεων - Ομοιόμορφη Συνέχεια

1. Εξετάστε αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(i) $f(x) = \tan x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(ii) $f(x) = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}$

(iii) $f(x) = \log x, \quad x \in [1, +\infty)$

(iv) $f(x) = \log x, \quad x \in (0, +\infty)$

(v) $f(x) = \cos(e^x), \quad x \in \mathbb{R}$

(vi) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$

(vii) $f(x) = \sin(\sqrt{x}), \quad x \in [0, +\infty)$

2. Έστω $\alpha > 0$ και $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα. Μία συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση Lipschitz τάξης α, αν υπάρχει σταθερά $K > 0$ ώστε να ισχύει:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha, \quad \text{για κάθε } x, y \in I$$

(α) Δείξτε ότι, αν $\alpha > 1$, τότε οι μόνες συναρτήσεις Lipschitz τάξης α είναι οι σταθερές.

(β) Δείξτε ότι, αν $0 < \alpha \leq 1$, τότε κάθε συνάρτηση Lipschitz τάξης α είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Δείξτε ότι, αν $0 < \alpha \leq 1$, τότε η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha, x \in [0, +\infty)$ είναι Lipschitz τάξης α και, κατά συνέπεια, ομοιόμορφα συνεχής.

(δ) Ειδικότερα, παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$, η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[n]{x},\ x \geq 0$, είναι Lipschitz τάξης $\frac{1}{n}$ και άρα ομοιόμορφα συνεχής, ενώ δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz (τάξης 1).

3. (α) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ότι ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Δείξτε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), δείξτε ότι
(i) Για κάθε $\alpha > 1$, η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha,\ x \in [0, +\infty)$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(ii) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.
(iii) Η συνάρτηση $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4. (α) Δείξτε ότι, αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε υπάρχουν σταθερές $A, B > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A|x| + B$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), δώστε μία διαφορετική απόδειξη για τα (i), (ii), (iii) της Άσκησης 3.

5. (α) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$, δηλαδή υπάρχουν $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Εξετάστε αν είναι ομοιόμορφα συνεχής η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$.

6. (α) Δίνεται συνάρτηση $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: Υπάρχει $T > 0$ και ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε $\lim_{n\to+\infty} |f(x_n + T) - f(x_n)| = +\infty$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. (*Υπόδειξη:* Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, για $\varepsilon = 1$, θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in [a, +\infty)$ με $|x - y| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| < 1$. Επιλέξτε $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{T}{k_0} < \delta$. Δείξτε ότι τότε θα ισχύει $|f(x + T) - f(x)| < k_0$, για κάθε $x \in [a, +\infty)$.)

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

7. (α) Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, $f : I \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και a εσωτερικό σημείο του I. Έστω $A = \{x \in I : x \leq a\}$ και $B = \{x \in I : x \geq a\}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A και ομοιόμορφα συνεχής στο B, δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0, 1) \cup (1, 2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \in [0, 1)$ και $f(x) = 1$ αν $x \in (1, 2]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 1)$ και ομοιόμορφα συνεχής στο $(1, 2]$, αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο πεδίο ορισμού της.