Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 31ο (04-07-2014)

$\int \frac{P(\sin x,\cos x)}{Q(\sin x,\cos x)}dx$ όπου $P(t,s), Q(t,s)$ πολυώνυμα δύο μεταβλητών

Κάποιες ειδικές αντικαταστάσεις

1. Ολοκληρώματα της μορφής $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$.

Παραδείγματα

$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}dx$, $P(t,s)=1+t$, $Q(t,s)=1-s$

$\int \frac{\sin^3 x\cos^6 x - 2\sin x\cos^7 x + 6}{\sin^2 x\cos^4 x - \cos x + 3\sin x}$

Θέτουμε $u=\tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan u$.

Εκφράζουμε τα $\sin x$, $\cos x$ και dx σαν ρητές συναρτήσεις του u.

(a) $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} \overset{(\div\cos^2\frac{x}{2})}{=} \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

(b) $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$.

(c) $du = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2}dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2}du$.

Το $\int R(\sin x,\cos x)dx$, με την αντικατάσταση $u=\tan\frac{x}{2}$, γίνεται $\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\cdot\frac{2}{1+u^2}du$, το οποίο υπολογίζεται, (ρητή συνάρτηση) και στο τέλος $u=\tan\frac{x}{2}$.

Παράδειγμα

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{1-\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du =$$

$$= \int \frac{(1+u)^2}{\cancel{2}u^2}\cdot\frac{\cancel{2}}{1+u^2}\,du = \int \frac{u^2+2u+1}{u^2(1+u^2)}\,du \quad (*)$$

Ζητάμε A, B, Γ, Δ:

$$\frac{u^2+2u+1}{u^2(1+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{\Gamma u+\Delta}{1+u^2} =$$

$$= \frac{Au(1+u^2)+B(1+u^2)+(\Gamma u+\Delta)u^2}{u^2(1+u^2)} =$$

$$= \frac{(A+\Gamma)u^3+(B+\Delta)u^2+Au+B}{u^2(1+u^2)} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \\ \Gamma=-2 \\ \Delta=0 \end{cases}$$

Άρα $(*) = \int \frac{2}{u}\,du + \int \frac{1}{u^2}\,du - \int \frac{2u}{u^2+1}\,du =$

$= 2\ln|u| - \frac{1}{u} - \ln(u^2+1) =$

$= 2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} - \ln\left(\tan^2\frac{x}{2}+1\right) + c$

2 Ολοκληρώματα της μορφής:

A: $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ (π.χ. $\int \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{3+\sqrt{1-x^2}}\,dx$)

$(a>0)$ B: $\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$ (π.χ. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$)

Γ: $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$. (π.χ. $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$)

Για το Α:

$x = a\sin y$

$dx = a\cos y\,dy$

$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 y)} = a\cos y \Rightarrow \int \underbrace{R(a\sin y,\ a\cos y)\cdot a\cos y}_{R_1(\sin y,\ \cos y)}\,dy$

Για το Β:

Μπορούμε να θέσουμε:

$x = a\tan y \Rightarrow dx = \frac{a}{\cos^2 y}dy$,

$\sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{1+\tan^2 y} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{a}{\cos y}$,

οπότε:

$$\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})dx = \int \underbrace{R\left(a\tan y, \frac{a}{\cos y}\right)\frac{a}{\cos^2 y}}_{R_1(\sin y,\, \cos y)} dy.$$

Άλλος τρόπος (προτείνεται):

Θέτουμε $\sqrt{x^2+a^2} = y - x$ (δηλαδή $y = x + \sqrt{x^2+a^2}$)

Τότε $\cancel{x^2}+a^2 = y^2 - 2yx + \cancel{x^2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{y^2-a^2}{2y}} \Rightarrow dx = \ldots = \frac{y^2+a^2}{2y^2}dy$.

Τότε $\sqrt{x^2+a^2} = y - \frac{y^2-a^2}{2y} = \frac{y^2+a^2}{2y}$

Παράδειγμα:

$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$

$\sqrt{x^2+1} = y - x \Rightarrow x^2+1 = y^2 - 2yx + x^2 \Rightarrow x = \frac{y^2-1}{2y}$.

$\sqrt{x^2+1} = y - \frac{y^2-1}{2y} = \frac{y^2+1}{2y}$

$dx = \ldots = \frac{y^2+1}{2y^2}dy$

Υπολογίζουμε το:

$$\int \frac{1}{\frac{y^2-1}{2y}\cdot\frac{y^2+1}{2y}}\cdot\frac{y^2+1}{2y^2}dy = \int\frac{2}{y^2-1}dy = \int\frac{2}{(y-1)(y+1)}dy =$$

$$= \int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + c = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x+\sqrt{x^2+1}+1}\right| + c.$$

Για το Γ: (περιληπτικά)

$$\sqrt{x^2-a^2} = y - x \Rightarrow x^2 - a^2 = y^2 - 2xy + x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{y^2+a^2}{2y} \Longrightarrow dx = \dots = \frac{y^2-a^2}{2y^2}\, dy$$
$$\sqrt{x^2-a^2} = y - \frac{y^2+a^2}{2y} = \frac{y^2-a^2}{2y}$$

Ασκήσεις

$\boxed{11}$ $\int \frac{1}{\sin x}\, dx$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x\, dx}{1-\cos^2 x}$$

Θέτουμε $y = \cos x \Rightarrow -dy = \sin x\, dx$

οπότε έχουμε το:

$$-\int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{dy}{y^2-1} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + c =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + c$$

$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx$

1ος τρόπος:

$$\frac{x}{(1+x^2)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{\Gamma x + \Delta}{(1+x^2)^2}$$ ($A = B = \Delta = 0$, άρα βγαίνει το ίδιο!)

2ος τρόπος:

Θέτω $y = x^2+1$, οπότε $dy = 2x\,dx$ και το ολοκλήρωμα γίνεται: $\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{2y} = -\frac{1}{2(x^2+1)} + c$.

$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$$\left.\begin{aligned} x &= \sin y \\ \sqrt{1-x^2} &= \cos y \\ dx &= \cos y\, dy \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{\sin y \cdot \cos y} \cos y\, dy = \int \frac{1}{\sin y}\, dy \;\dots$$

$\int x \arctan x \, dx$

$$\int x\arctan x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \arctan x\,dx = \frac{x^2\arctan x}{2} - \underbrace{\int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx}_{\text{επεί}} =$$

$$= \frac{x^2\arctan x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2\arctan x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2\arctan x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\arctan x}{2} + c.$$

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$y = x^2+1$

$dy = 2x\,dx$

Βρίσκουμε το $\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \sqrt{y} + c = \sqrt{x^2+1} + c.$ □

5 $\int \frac{x}{1+\sin x}\,dx$

$$\int \frac{x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} = \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx - \int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

Για το $\int x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int x(\tan x)'\,dx = x\tan x - \int \tan x\,dx = x\tan x + \ln|\cos x|$

Για το $\int x\left(-\frac{1}{\cos x}\right)' dx = -\frac{x}{\cos x} + \int \frac{1}{\cos x}\,dx = -\frac{x}{\cos x} + \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \ldots$

$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\cos x\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\cdot\cos x\,dx$$

Θέτουμε $y = \sin x \Rightarrow dy = \cos x\,dx$ και υπολογίζουμε το:

$$\int \frac{1-y^2}{y^2}\,dy = \int \frac{dy}{y^2} - \int dy = -\frac{1}{y} - y + c = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + c.$$

$\int \frac{x+4}{(x^2+1)(x-1)}\,dx$

Ζητάμε A, B, Γ: $\frac{x+4}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{\Gamma}{x-1} = \frac{Ax^2+Bx-Ax-B+\Gamma x^2+\Gamma}{(x^2+1)(x-1)}$

Σύστημα: $\left.\begin{array}{l} A+\Gamma=0 \\ B-A=1 \\ \Gamma-B=4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} A=-5/2 \\ B=-3/2 \\ \Gamma=5/2 \end{array}$

Άρα, έχουμε το:

$$-\frac{5}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\frac{5}{4}\ln(x^2+1)-\frac{3}{2}\arctan x+\frac{5}{2}\ln|x-1|+c \quad \square$$

$\boxed{6}$ $\int \sin(\ln x)dx$

$y=\ln x \Rightarrow x=e^y \Rightarrow dx=e^y dy$

Ζητάμε το:

$\int \sin y \cdot e^y dy$

το οποίο υπολογίζεται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες. $\square$

$\boxed{17}$ Ορίζουμε $\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$

Υπολογίστε το $\Gamma(n)$ για $n=1,2,3,\dots$

Λύση

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx \underset{\text{ορ.}}{=} \lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-x}dx=\lim_{M\to+\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^M\right)=\lim_{M\to+\infty}(1-e^{-M})=1.$$

$$\Gamma(2)=\int_0^\infty xe^{-x}dx$$

Παίρνω $M>0$ και γράφω:

$$\int_0^M xe^{-x}dx=\int_0^M x(-e^{-x})'dx=-xe^{-x}\Big|_0^M+\int_0^M e^{-x}dx=-\frac{M}{e^M}+1-e^{-M}=$$

$$=1-\frac{M+1}{e^M}\xrightarrow[M\to+\infty]{}1.$$

Άρα $\Gamma(2)=1$.

Επαγωγικό βήμα:

$$\int_0^M x^n e^{-x} = \int_0^M x^n(-e^{-x})'\,dx = -\left.\frac{x^n}{e^x}\right|_0^M + n\int_0^M x^{n-1}e^{-x}\,dx =$$

$$= -\underbrace{\frac{M^n}{e^M}}_{\downarrow M\to\infty \atop 0} + n\underbrace{\int_0^M x^{n-1}e^{-x}\,dx}_{\downarrow M\to+\infty \atop \Gamma(n)}$$

Άρα $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M x^n e^{-x}\,dx = n\Gamma(n)$

Απόδειξη, $\forall n \geq 1$ $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$

$\Gamma(2) = \int_0^\infty x e^{-x}\,dx = 1$

$\Gamma(3) = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = 2\Gamma(2) = 2$

$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3\cdot 2 = 3!$

$\Gamma(5) = 4\Gamma(4) = 4\cdot 3! = 4!$

και γενικά: $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$ $\square$