Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 27ο (25-06-2014)

Θεώρημα Taylor (μορφές υπολοίπου)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη και έστω $x_0\in[a,b]$.

(a) (μορφή Cauchy) Για κάθε $x\in[a,b]$ $\exists\xi$ στο διάστημα με άκρα x_0, x, ώστε $R_{n,f,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\xi)^n(x-x_0)$.

(b) (μορφή Lagrange) Για κάθε $x\in[a,b]$ $\exists\xi$ στο διάστημα με άκρα x_0, x, ώστε $R_{n,f,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

(c) (ολοκληρωτική μορφή) Αν η $f^{(n+1)}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε $R_{n,f,x_0}(x)=\frac{1}{n}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$.

Πολυώνυμο Taylor

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x_0\in[a,b]$.
Αν υπάρχει η $f^{(n)}(x_0)$ ορίζουμε: $T_{n,f,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Θεώρημα

Το T_{n,f,x_0} είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ που έχει την εξής ιδιότητα: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=0$

Δηλαδή, για x κοντά στο x_0: $|f(x)-T_{n,f,x_0}(x)| \ll |x-x_0|^n$

Ορισμός

Ορίζουμε $R_{n,f,x_0}(x)=f(x)-T_{n,f,x_0}$ $\rightsquigarrow$ το n-οστό υπόλοιπο Taylor.

Απόδειξη (Θεωρήματος Taylor)

Έχουμε σταθερό x_0 και θεωρούμε τυχόν $x\in[a,b]$.
Ορίζουμε $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ ως εξής: $\varphi(t)=R_{n,f,t}(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$

(1) $\varphi(x)=f(x)-f(x)=0$ (διότι: $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x)^k=f(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\overset{0}{\cancel{(x-x)^k}}=f(x)$).

(2) $\varphi(x_0)=R_{n,f,x_0}(x)$, δηλαδή $\boxed{R_{n,f,x_0}(x)=\varphi(x_0)-\varphi(x)}$

Υπολογίζουμε την $\varphi'(t) = \left(f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right)' =$

$= 0 - f'(t) - (f''(t)(x-t) - f'(t)) - \left(\frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{2f''(t)(x-t)}{2!} \right) - \dots$

$\dots - \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{n f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}{n!} \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$

(a) Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την φ ανάμεσα στα x_0, x:

$\exists \xi : \underbrace{\varphi(x_0) - \varphi(x)}_{=} = \varphi'(\xi)(x_0 - x) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n (x_0 - x)$

$\Rightarrow R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n (x - x_0)$.

(b) Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ του Cauchy για την φ και για την $g(t) = (x-t)^{n+1}$.

Υπάρχει ξ ανάμεσα στα x_0, x: $\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{\varphi'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n+1} - 0} = \frac{\cancel{-}\frac{f^{(n+1)}(\xi)\cancel{(x-\xi)^n}}{n!}}{\cancel{-}(n+1)\cancel{(x-\xi)^n}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Rightarrow$

$\Rightarrow R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

(c) Εδώ έχουμε υποθέσει ότι η $f^{(n+1)}$ είναι ολοκληρώσιμη $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ η $\varphi'(t) = \frac{-f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Από το 2ο Θ.Θ. του Απειροστικού Λογισμού:

$R_{n,f,x_0}(x) = \varphi(x_0) - \varphi(x) = \int_x^{x_0} \varphi'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$. ∎

Εφαρμογή

(I) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

- $f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k$

Άρα, για κάθε $n \geq 1$ έχουμε: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

- Παίρνω $x \neq 0$ και θέλω να "φράξω" το $|R_n(x)|$ "για μεγάλα n".

Γράφουμε $|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right| = \left| \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n dt \right|$

Περιπτώσεις: (1) $0 \;\; t \;\; x$ $\Rightarrow (x-t) \geq 0$, $e^t \leq e^x$, $0 \leq x - t \leq x$.

$|R_n(x)| = \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n dt \leq \int_0^x \frac{e^x \cdot x^n}{n!} dt = \frac{e^x x^{n+1}}{n!}$

(2) $x \;\; t \;\; 0$ $\Rightarrow e^t \leq e^0 = 1$, $|x-t| \leq |x|$.

$|R_n(x)| = \left| -\int_x^0 \frac{e^t (x-t)^n}{n!} dt \right| \leq \int_x^0 \frac{e^t |x-t|^n}{n!} dt \leq \int_x^0 \frac{1 \cdot |x|^n}{n!} dt = \frac{(-x)|x|^n}{n!} = \frac{|x|^{n+1}}{n!}$

Άρα, $|R_n(x)| \le \max\{1, e^x\} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{n!}$

Άρα, αν $b_n = \max\{1, e^x\} \frac{|x|^{n+1}}{n!}$, από κριτήριο λόγου:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1 \Rightarrow b_n \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Όμως, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{T_n(x)} + R_n(x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Βασικά αναπτύγματα σε δυναμοσειρές

I $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$$e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{T_n(x)} + R_n(x)$$

Τα $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ είναι τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Αν (για κάποιο x) δείξουμε ότι $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, τότε έχουμε:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Αν αυτό συμβαίνει για κάθε x (ή σε ένα διάστημα γύρω από το 0), έχουμε $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ για όλα αυτά τα x.

II $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{συν}x$, $x_0 = 0$

$$\begin{cases} f(x) = \text{συν}x \\ f'(x) = -\text{ημ}x \\ f''(x) = -\text{συν}x \\ f^{(3)}(x) = \text{ημ}x \end{cases}, \quad \text{δηλαδή:} \quad \begin{cases} f^{(2k)}(x) = (-1)^k \text{συν}x \rightsquigarrow f^{(2k)}(0) = (-1)^k \\ f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \text{ημ}x \rightsquigarrow f^{(2k+1)}(0) = 0. \end{cases}$$

$$\underset{\underset{T_{2n+1}(x)}{\parallel}}{T_{2n}(x)} = \sum_{s=0}^{2n} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} x^s = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Όπως πριν, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\quad \text{συν}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n}(x)$

Από την μορφή υπολοίπου Lagrange, $\forall x \neq 0$ $\exists \xi_x$ ανάμεσα στο 0 και x, ώστε: $R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi_x)}{(2n+1)} x^{2n+1} \Rightarrow$

$|\pm\eta\mu x, \pm\sigma\upsilon\nu x| \le 1$

$$\Rightarrow |R_{2n}(x)| = \frac{|f^{(2n+1)}(\xi_x)|}{(2n+1)!}|x|^{2n+1} \le \underbrace{\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\gamma_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(διότι: $\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\,\frac{(2n+1)!}{|x|^{2n+1}} = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} \to 0<1$)

$\Rightarrow$ Άρα $\forall x\in\mathbb{R}$ $R_{2n}(x)\to 0$.

$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$ $\sigma\upsilon\nu x = \sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa x^{2\kappa}}{(2\kappa)!}$.

$e^x = \sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{x^\kappa}{\kappa!}$, $x\in\mathbb{R}$	$\left(= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)$
$\sigma\upsilon\nu x = \sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa x^{2\kappa}}{(2\kappa)!}$, $x\in\mathbb{R}$	$\left(= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots\right)$
$\eta\mu x = \sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa x^{2\kappa+1}}{(2\kappa+1)!}$, $x\in\mathbb{R}$	$\left(= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots\right)$

$$\frac{1}{1-y} = \underbrace{1+y+\dots+y^n}_{\frac{1-y^{n+1}}{1-y}} + \frac{y^{n+1}}{1-y}$$

(III) $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0=0$, $x>-1$

Ιδέα: $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt$, $x>-1$.

Ξεκινάμε από την:

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = 1 + (-t) + (-t)^2 + \dots + (-t)^n + \frac{(-t)^{n+1}}{1-(-t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t} \quad \forall t>-1.$$

Άρα,

$$\ln(x+1) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{T_{n+1}(x);;} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}dt$$

Χρειάζεται να γίνουν τα εξής:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \sum_{\kappa=1}^{n+1}\frac{(-1)^{\kappa-1}x^\kappa}{\kappa}}{x^{n+1}} = 0$.

Θέλουμε να φράξουμε το $\left|(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}dt\right| = I_{n+1}$.

→ $x>0$: $I_{n+1} = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \le \int_0^x t^{n+1}dt = \frac{x^{n+2}}{n+2}$ και $\frac{\frac{x^{n+2}}{n+2}}{x^{n+1}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

→ $x<0$: $I_{n+1} = \left|\int_x^0 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt\right| \le \int_x^0 \frac{|t|^{n+1}}{1+t}dt \le \frac{1}{1+x}\int_x^0 |t|^{n+1}dt$

$$\frac{1}{1+x}\int_0^{|x|} y^{n+1}dy = \frac{|x|^{n+2}}{(1+x)(n+2)}$$

Τότε, $\left|\frac{\frac{|x|^{n+2}}{(1+x)(n+2)}}{x^{n+1}}\right| \longrightarrow 0$, όταν $x\to 0^-$.

Επίσης, $|R_{n+1}(x)| \le \frac{|x|^{n+2}}{n+2}\max\left\{1, \frac{1}{1+x}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, αν $|x|<1$ (και για $x=1$)

Τελικά, $\ln(1+x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa-1}x^\kappa}{\kappa} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$, $\forall x\in(-1,1]$

Ειδικότερα: για $x=1$,

$$\ln 2 = \ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$