Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 24ο (18-06-2014)

1 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.
Δείξτε ότι $\exists s\in[a,b]: \int_a^s f(t)dt = \int_s^b f(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)dt$.

Λύση

$F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ είναι συνεχής, οπότε ζητάμε $s\in[a,b]$:
$\int_a^s f(t)dt = \int_s^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - \int_a^s f(t)dt$

Ισοδύναμα ζητάμε $s\in[a,b]: \int_a^s f(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)dt$.

$g(x)=\int_a^x f(t)dt - \frac{1}{2}\int_a^b f(t)dt$.

$$\left.\begin{array}{l} g(a) = -\frac{1}{2}\int_a^b f(t)dt \\ g(b) = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)dt \end{array}\right\} g(a)g(b) = -\frac{1}{4}\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \xi\in(a,b): g(s)=0$. $\square$

2 Υποθέτουμε ότι $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι:
$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt \quad \forall x\in[0,1].$$
Δείξτε ότι $f(x)=0 \quad \forall x\in[0,1]$.

Λύση

$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_x^1 f(t)dt \Rightarrow \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - \int_x^1 f(t)dt$

$F(x)=\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt \Rightarrow f$ παραγωγίσιμη $\forall x\in[0,1]$ και $F'(x)=f(x)=0$ $\forall x\in[0,1]$

$\square$

11 Έστω $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχώς παραγωγίσιμη με $f(0)=0$.
Δείξτε ότι $\forall x>0 \quad \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = x f(x)$.

Λύση

Θέτουμε $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$, $\psi(x)=x f(x)$.

$\varphi'(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)'+\left(\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt\right)'=f(x)+f^{-1}(f(x))f'(x)=f(x)+xf'(x)$.

$\psi'(x)=(xf(x))'=f(x)+xf'(x)$.

$\varphi-\psi=c \Rightarrow \varphi(x)=\psi(x) \quad \forall x\in[0,1]$ □

$\boxed{13}$ Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x)\neq 0$ $\forall x>0$ η οποία ικανοποιεί $(f(x))^2=2\int_0^x f(t)dt$ $\forall x\geq 0$.

Δείξτε ότι $f(x)=x$ $\forall x\geq 0$.

Λύση

$\forall x\in[0,+\infty)$ $f(x)=\pm\sqrt{2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^{1/2}$.

$f(x)=\sqrt{2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^{1/2}$, άρα f παραγωγίσιμη

$2f(x)f'(x)=2f(x)\Rightarrow f'(x)=1$ $\forall x\geq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=(x)' \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} f(x)=x+c \\ f(0)=0 \end{array}\right\} c=0 \Rightarrow f(x)=x \quad \forall x\in[0,+\infty). \quad \square$$

$\boxed{14}$ Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη.

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)dx=0$.

Λύση

$$a_n=\int_a^b f(x)\cos(nx)=\int_a^b f(x)\cdot\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)'dx=$$
$$=f(x)\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}dx=$$
$$=\underbrace{\frac{f(b)\sin(nb)-f(a)\sin(na)}{n}}_{b_n}-\underbrace{\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)dx}_{c_n}$$

$$|b_n|=\frac{1}{n}|f(b)\sin(bn)-f(a)\sin(an)|\leq\frac{1}{n}\left(|f(b)||\sin(bn)|+|f(a)||\sin(an)|\right)\leq\frac{|f(b)|+|f(a)|}{n}\to 0$$

$$|c_n|=\left|\int_a^b f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}dx\right|\leq\int_a^b|f'(x)|\frac{|\sin(nx)|}{n}dx\leq\quad(\exists M>0:\forall x\in[a,b]\ |f'(x)|\leq M)$$
$$\leq\int_a^b M\frac{1}{n}dx=\frac{M(b-a)}{n}\to 0.$$

$|a_n|=\int_a^b f(x)\cos(nx)dx\leq|b_n|+|c_n|\to 0$. □

31 Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε $g(x) = 1 + \int_0^x g(t)dt$.
Βρείτε την g.

Λύση
Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη: $g'(x) = \left(\int_0^x g(t)dt\right)' = g(x)$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad g'(x) - g(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}g'(x) - e^{-x}g(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-x}g'(x) + (e^{-x})'g(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (e^{-x}g(x))' = 0$

Άρα η $h(x) = e^{-x}g(x) = c$, δηλαδή $g(x) = ce^{x}$

$ce^{x} = 1 + \int_0^x g \overset{x=0}{\Rightarrow} ce^{0} = 1 + 0 \Rightarrow c = 1$ $\Big\}$ $g(x) = e^{x}$. □

32 Έστω $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, $f(0)=0$.
Δείξτε ότι $(f(x))^2 \le x\int_0^x (f'(t))^2 dt$.

Λύση
$\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) = f(x)$

$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)dt\right| \le \int_0^x |f'(t)|dt = \int_0^x |f'(t)|\cdot 1\, dt \le \left(\int_0^x (f'(t))^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_0^x 1 dt\right)^{1/2}$.

Υψώνουμε τετράγωνα $(f(x))^2 \le x\int_0^x (f'(t))^2 dt$. □

38 Υπολογίστε το $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} e^t \sin t\, dt$.

Λύση
Θέτω $y = x^2$.

$\lim_{y\to 0} \frac{1}{y^2}\int_0^y e^t \sin t dt = \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y^2}$, όπου $f(y) = \int_0^y e^t \sin t dt$

$\overset{DLH}{=} \lim_{y\to 0}\frac{f'(y)}{2y} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y \sin y}{2y} = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$. □

39 Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+\sqrt{x}}\frac{t}{1+t^2}dt$.

Λύση

$$\int_a^b \frac{t}{1+t^2}dt=\int_a^b \frac{1}{2}\frac{(1+t^2)'}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\int_a^b(\log(1+t^2))'dt=\frac{1}{2}\log(1+t^2)\Big|_a^b$$

$$\int_x^{x+\sqrt{x}}\frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\log(1+t^2)\Big|_{t=x}^{t=x+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\log\frac{1+(x+\sqrt{x})^2}{1+x^2}.$$

Θέτουμε $\varphi(x)=\frac{1+(x+\sqrt{x})^2}{1+x^2}=\frac{\frac{1}{x^2}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}{1+\frac{1}{x^2}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{0+1+0}{1+0}=1.$

Άρα, $\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+\sqrt{x}}\frac{t}{1+t^2}dt=0.$ □

40 Ορίζουμε $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=\int_0^x e^t\cos(x-t)dt$.
Υπολογίστε την G'.

Λύση

(1ο Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητής)

$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(s)ds,\quad s=\varphi(t),\quad ds=\varphi'(t)dt.$

Θέτουμε $u=x-t$, $du=-dt$.

$G(x)=\int_x^0 e^{x-u}\cos u(-du)=e^x\int_0^x e^{-u}\cos u\,du.$

$G'(x)=(e^x)'\int_0^x e^{-u}\cos u\,du+e^x\left(\int_0^x e^{-u}\cos u\,du\right)'=$

$=e^x\int_0^x e^{-u}\cos u\,du+e^xe^{-x}\cos x=$

$=\cos x+e^x\int_0^x e^{-u}\cos u\,du.$ □

41 Ορίζουμε $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$
Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση

$f'(x)=\left(\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt\right)'+\left(\int_0^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt\right)'$

$F(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt,\quad g(x)=\frac{1}{x},\quad \left(\int_0^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt\right)'=(F\circ g)'(x)=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2}\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0. \qquad \square$$

$\boxed{34}$ Έστω $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής, αύξουσα.
Δείξτε ότι η $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $G(x)=\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$ είναι αύξουσα.

<u>Λύση</u>

$\forall x>0 \quad G'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)'\int_0^x g(t)dt + \frac{1}{x}\left(\int_0^x g(t)dt\right)' =$
$= -\frac{1}{x^2}\int_0^x g(t)dt + \frac{1}{x}g(x)$.

Ζητάμε $\frac{1}{x^2}\int_0^x g(t)dt \le \frac{1}{x}g(x) \Rightarrow \int_0^x g(t)dt \le x g(x)$

$\forall t \le x \Rightarrow g(t) \le g(x) \Rightarrow \int_0^x g(t)dt \le \int_0^x g(x)dt = x g(x)$. $\square$