Απειροστικός Λογισμός II
Μάθημα 16ο (28-05-2014)

Ολοκλήρωμα Riemann

Ορισμός

Έστω $a,b \in \mathbb{R}$ με $a<b$.

Μια διαμέριση P του $[a,b]$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο $P=\{x_0<x_1<\dots<x_n\} \subseteq [a,b]$ με $x_0=a$ και $x_n=b$.

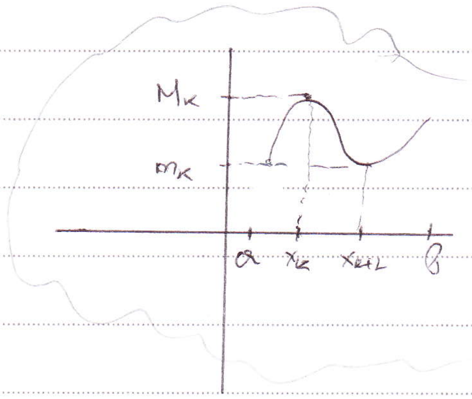
- Κατά σύμβαση, το $x_0<\dots<x_n$ είναι η αύξουσα αρίθμηση του P.
- Αν $P=\{x_0<\dots<x_n\}$ διαμέριση του $[a,b]$, τότε η οικογένεια $\{[x_k,x_{k+1}] : 0\leq k\leq n-1\}$ είναι διαστήματα του $[a,b]$ που η ένωσή τους είναι το $[a,b]$
- Θα ονομάζουμε <u>πλάτος</u> της διαμέρισης P την ποσότητα $\|P\|=\max\{x_{k+1}-x_k : 0\leq k\leq n-1\}$
- Αν P και Q διαμερίσεις του $[a,b]$, τότε λέμε ότι η Q είναι εκλέπτυνση της P αν $Q\subseteq P$
- Αν P_1, P_2 διαμερίσεις του $[a,b]$, τότε η $P_1\cup P_2$ ονομάζεται η <u>κοινή εκλέπτυνση</u> των P_1, P_2.

Παρατήρηση

Αν P_1, P_2 διαμερίσεις του $[a,b]$ και Q η κοινή εκλέπτυνση των P_1, P_2, τότε για κάθε R διαμέριση του $[a,b]$ που είναι ταυτόχρονα εκλέπτυνση της P_1 και της P_2, έχουμε ότι $R\supseteq Q$.

Ορισμοί

- Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη.
  Έστω $P=\{x_0<\dots<x_n\}$ διαμέριση του $[\alpha,\beta]$
  Τότε, $\forall\ 0\le k\le n-1$ θέτουμε:
  $\boxed{m_k(f,P)=\inf\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}}$
  και $\boxed{M_k(f,P)=\sup\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}}$
  Προφανώς $m_k(f,P)\le M_k(f,P)$.



- Θέτουμε $\boxed{L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(f,P)(x_{k+1}-x_k)}$ (κάτω άθροισμα)
  $\boxed{U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k(f,P)(x_{k+1}-x_k)}$ (άνω άθροισμα)
  Προφανώς $L(f,P)\le U(f,P)$

Πρόταση

Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$, P_1, P_2 διαμερίσεις του $[\alpha,\beta]$ και $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση.
Τότε: $L(f,P_1)\le U(f,P_2)$.

Λήμμα

Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$, $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση.
Έστω, επίσης, $P=\{x_0<\dots<x_n\}$ διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ και $y\in\mathbb{R}$, με $x_k<y<x_{k+1}$ για κάποιο $k\in\{0,\dots,n-1\}$.
Θέτουμε $Q=P\cup\{y\}$.
Τότε: $L(f,P)\le L(f,Q)\le U(f,Q)\le U(f,P)$.

Απόδειξη

Θέτουμε: $m_k^{(1)}(f,P)=\inf\{f(x): x_k\le x\le y\}$

$m_k^{(2)}(f,P)=\inf\{f(x): y\le x\le x_{k+1}\}$

$m_k(f,P)=\inf\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}$

Τότε: (a) $m_k^{(1)}(f,P) \ge m_k(f,P)$
(b) $m_k^{(2)}(f,P) \ge m_k(f,P)$
γιατί αν $A \supseteq B \Rightarrow \inf A \le \inf B$

Άρα,
$$L(f,Q) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i(f,P)(x_{i+1}-x_i) + m_k^{(1)}(f,P)(y-x_k) + m_k^{(2)}(f,P)(x_{k+1}-y) + \sum_{i=k+1}^{n-1} m_i(f,P)(x_{i+1}-x_i) \ge$$
$$\ge \sum_{\substack{i=0 \\ i\ne k}}^{n-1} m_i(f,P)(x_{i+1}-x_i) + m_k(f,P)(y-x_k) + m_k(f,P)(x_{k+1}-y) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} m_i(f,P)(x_{i+1}-x_i) = L(f,P)$$

Όμοια $U(f,Q) \le U(f,P)$ ■

Πόρισμα

Αν R εκλέπτυνση της P τότε:
$$L(f,P) \le L(f,R) \le U(f,R) \le U(f,P).$$

Απόδειξη

Με επαγωγή στην πληθικότητα του $R\setminus P$. ■

Απόδειξη (Πρότασης)

Έστω P_ε η κοινή εκλέπτυνση των P_1, P_2.
Τότε, από το Πόρισμα:
$$L(f,P_1) \le L(f,P_\varepsilon) \le U(f,P_\varepsilon) \le U(f,P_2)$$ ■

Ορισμός

Έστω $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση.
Θεωρούμε τα σύνολα:
$A(f) = \{L(f,P) : P$ διαμέριση του $[a,\beta]\}$
και $B(f) = \{U(f,P) : P$ διαμέριση του $[a,\beta]\}$

Τότε, από την Πρόταση, έχουμε ότι: $\forall x\in A(f)\ \forall y\in B(f) \Rightarrow x\le y$.
Άρα: $\sup(A(f)) \le \inf(B(f))$ ($x\in A(f) \Rightarrow x$ κάτω φράγμα του $B(f) \Rightarrow$
$\Rightarrow x\le \inf(B(f))\ \forall x\in A(f) \Rightarrow \inf(B(f))$ άνω φράγμα του $A(f) \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup(A(f)) \le \inf(B(f))$)

Ορισμός (Ολοκλήρωμα Riemann)

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a<b$ και $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση.

Ορίζουμε: $\underline{\int_a^b} f(t)dt = \sup\{L(f,P) : P$ διαμέριση του $[a,b]\}$

Η ποσότητα $\underline{\int_a^b} f(t)dt$ ονομάζεται κάτω ολοκλήρωμα της f.

Επίσης, ορίζουμε: $\overline{\int_a^b} f(t)dt = \inf\{U(f,P) : P$ διαμέριση του $[a,b]\}$.

Η ποσότητα $\overline{\int_a^b} f(t)dt$ ονομάζεται άνω ολοκλήρωμα της f.

Τότε έχουμε: $\underline{\int_a^b} f(t)dt \leq \overline{\int_a^b} f(t)dt$

Η f καλείται Riemann ολοκληρώσιμη, αν $\underline{\int_a^b} f(t)dt = \overline{\int_a^b} f(t)dt$.

Σ' αυτήν την περίπτωση, το ολοκλήρωμα της f είναι η ποσότητα: $\int_a^b f(t)dt = \underline{\int_a^b} f(t)dt = \overline{\int_a^b} f(t)dt$.

Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας Riemann

Θεώρημα

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση.

Τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν $\forall \varepsilon>0 \ \exists P_\varepsilon$ διαμέριση του $[a,b]$: $0 \leq U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω $\varepsilon>0$.

Αφού $\underline{\int_a^b} f(t)dt = \sup\{L(f,P)\}$, $\exists P_1$ διαμέριση του $[a,b]$:

$$L(f,P_1) \leq \underline{\int_a^b} f(t)dt \leq L(f,P_1) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Όμοια, $\exists P_2$ διαμέριση του $[a,b]$: $U(f,P_2) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{\int_a^b} f(t)dt \leq U(f,P_2)$

Έστω P_ε η κοινή εκλέπτυνση των P_1, P_2.

Τότε: $L(f,P_1) \leq L(f,P_\varepsilon) \leq U(f,P_\varepsilon) \leq U(f,P_2)$

Άρα: $0 \leq U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) \leq U(f,P_2) - L(f,P_1) \leq$
$\leq \left(\overline{\int_a^b} f(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\underline{\int_a^b} f(t)dt - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$, αφού f Riemann ολοκληρώσιμη.

($\Leftarrow$) Αν $\forall \varepsilon>0 \ \exists P_\varepsilon : 0 \leq U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow U(f,P_\varepsilon) \leq L(f,P_\varepsilon) + \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f(t)dt \leq U(f,P_\varepsilon) \leq L(f,P_\varepsilon) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f(t)dt + \varepsilon \overset{\varepsilon \text{ τυχαίο}}{\Rightarrow} \overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \Rightarrow f$ Riemann ολοκληρώσιμη ∎