Ενδιάμεση Εξέταση
Σάββατο, 14 Ιουνίου

Απειροστικός Λογισμός II
Μάθημα 14ο (21-05-2014)

Ορισμός (Ομοιόμορφη Συνέχεια)
Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται ομοιόμορφα συνεχής αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: "για κάθε ζευγάρι σημείων $x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$".

Προτάσεις

(1) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε είναι συνεχής.

(2) Η f λέγεται Lipschitz αν $\exists M > 0$: $\forall x, y \in A \ |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$
Αν η f είναι Lipschitz, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(3) Αν η f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα I και είναι παραγωγίσιμη σ'αυτό, τότε:
$$f \text{ Lipschitz} \iff f' \text{ φραγμένη}.$$

Χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών.
Έστω $f: A \to \mathbb{R}$.
Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνον αν "για κάθε ζευγάρι ακολουθιών (x_n), (y_n) στο A με $x_n - y_n \to 0$ ισχύει $f(x_n) - f(y_n) \to 0$".

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω $x_n, y_n \in A$ με $x_n - y_n \to 0$.
Θα δείξουμε ότι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.
Παίρνουμε $\varepsilon > 0$ και ζητάμε $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0 \ |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$.
Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\exists \delta > 0$: "αν $x, y \in A$

και $|x-y|<\delta$, τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$"

Αφού $x_n - y_n \to 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0$ $|x_n - y_n| < \delta \overset{*}{\Longrightarrow} \forall n \geq n_0$ $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon$.

($\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Τότε, $\exists \varepsilon>0$: $\forall \delta>0$ μπορούμε να βρούμε $x,y \in A$ ώστε $|x-y|<\delta$, αλλά $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$.

Εφαρμόζοντας αυτό για $\delta = \frac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$ βρίσκουμε $x_n, y_n \in A$: $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, αλλά $|f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n - y_n \to 0$, ενώ $f(x_n)-f(y_n) \not\to 0$, άτοπο. ■

Παράδειγμα

Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \text{συν}(x^2)$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ορίζουμε $x_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $y_n = \sqrt{n \cdot \pi}$

- $x_n - y_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{n\pi} = \dfrac{\pi/2}{\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}} + \sqrt{n\pi}} \longrightarrow 0$
- $|f(x_n)-f(y_n)| = |\text{συν}(n\pi + \frac{\pi}{2}) - \text{συν}(n\pi)| = 1 \to 1 \neq 0$.

Θεώρημα 1

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη

Έστω ότι δεν είναι.

Τότε, υπάρχουν ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ στο $[a,b]$ και $\exists \varepsilon>0$: $x_n - y_n \to 0$, αλλά $|f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon$.

- Η (x_n) είναι φραγμένη ($a \leq x_n \leq b$), άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (από Θ. B-W).

  Δηλαδή, $\exists x_{k_n} \to x_0$ και μάλιστα $x_0 \in [a,b]$ (διότι $a \leq x_{k_n} \leq b$).
- Έχουμε $x_{k_n} \to x_0$ και $y_n - x_n \to 0 \Rightarrow y_{k_n} = (y_{k_n} - x_{k_n}) + x_{k_n} \to 0 + x_0 = x_0$

• Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 \in [a,\beta]$ έχουμε:

$x_{k_n} \to x_0 \Rightarrow f(x_{k_n}) \to f(x_0)$ (αρχή της μεταφοράς)

$y_{k_n} \to x_0 \Rightarrow f(y_{k_n}) \to f(x_0)$ (———— // ————)

$\Rightarrow \varepsilon \leq |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \longrightarrow |f(x_0) - f(x_0)| = 0$, άτοπο. ■

Θεώρημα 2

Έστω $f:(a,\beta) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to \beta^-} f(x)$ και είναι πραγματικοί αριθμοί.

Παρατηρήσεις

(1) $f:(a,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής

Τότε, f ομοιόμορφα συνεχής $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \in \mathbb{R}$

(2) $f:[a,\beta) \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Τότε, f ομοιόμορφα συνεχής $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to \beta^-} f(x) \in \mathbb{R}$.

(3) $f:(a,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Δεν ισχύει ότι πρέπει να $\exists \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.

(Δεν έχουμε τέτοιο κριτήριο).

Λήμμα

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής.

Αν (x_n) είναι βασική ακολουθία στο A, τότε η $(f(x_n))$ είναι βασική.

(Οι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις απεικονίζουν βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες).

Απόδειξη (Λήμματος)

Έστω (x_n) βασική ακολουθία στο A.

Ζητάμε: $(f(x_n))$ βασική

Παίρνουμε $\varepsilon>0$ και ζητάμε $n_0\in\mathbb{N}$: $\forall n,m\ge n_0 \quad |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$.

Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\exists\delta>0$:

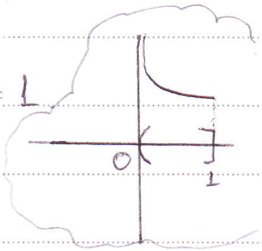
"$(x,y\in A)\wedge(|x-y|<\delta)\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$" $(*)$

Αφού η (x_n) είναι βασική, $\exists n_0\in\mathbb{N}$:

$\forall n,m\ge n_0 \quad |x_n-x_m|<\delta \xRightarrow{(*)} \forall n,m\ge n_0 \quad |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$. ∎

Παράδειγμα

Η $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.



Η $x_n=\frac{1}{n}$ είναι βασική (διότι $x_n\to 0$) και $0<x_n\le 1$.

Όμως, $f(x_n)=\frac{1}{x_n}=n\to+\infty$.

Άρα, δεν είναι βασική (θα ήταν συγκλίνουσα).

Άρα (από το Λήμμα) η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη (Θεωρήματος 2)

(⇒) Θεωρούμε μια ακολουθία (x_n) στο (a,b) με $x_n\to a^+$.

Η (x_n) είναι συγκλίνουσα $\xRightarrow{(\text{Κεφ. 1})}$ (x_n) βασική $\xRightarrow{\text{Λήμμα}}$ $(f(x_n))$ βασική $\xRightarrow{(\text{Κεφ. 1})}$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\ell$.

Έστω, τώρα, τυχούσα (y_n) στο (a,b) με $y_n\to a^+$

Έχουμε $y_n-x_n\to a-a=0 \xRightarrow{(\text{πρόταση})} f(y_n)-f(x_n)\to 0$

Όμως, $f(x_n)\to\ell$

Άρα, $f(y_n)=(f(y_n)-f(x_n))+f(x_n)\to 0+\ell=\ell$

Από την αρχή της μεταφοράς, για το όριο, έχουμε: $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\ell$.

Όμοια, για το $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$.

(⇐) Υποθέτουμε ότι f συνεχής και $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\ell$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=m$.

Ορίζουμε $F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \begin{cases} \ell, & x=\alpha \\ f(x), & \alpha<x<\beta \\ m, & x=\beta \end{cases}$

Η F είναι συνεχής, άρα ομοιόμορφα συνεχής (από Θεώρημα 1).

[<u>Παρατήρηση</u>
Αν $F: A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και αν $B \subseteq A$, τότε η $F|_B : B \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.]

Με βάση αυτό, η $f = F|_{(\alpha,\beta)}$ είναι ομ. συνεχής. ■

<u>Βασική άσκηση</u> ($\boxed{8}$, $\boxed{9}$)

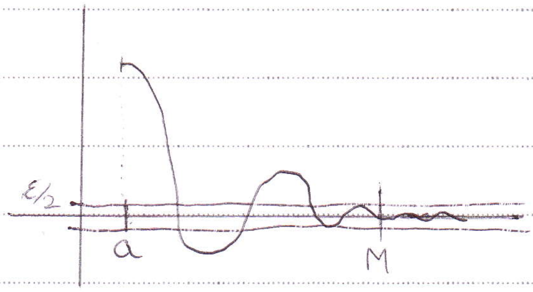
Έστω $f: [\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής.
Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

<u>Λύση</u>

Έστω $\varepsilon>0$.

Υπάρχει $M>0$: $\forall z \geq M \quad |f(z)| \overset{(**)}{<} \frac{\varepsilon}{2}$.

Η f είναι ομ. συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, M]$, άρα $\exists \delta>0$: "αν $x,y \in [\alpha, M]$ και $|x-y|<\delta$, τότε $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2$". (*)



Έστω $x,y \in [\alpha, +\infty)$ με $|x-y|<\delta$.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(1) $x,y \in [\alpha, M]$ και $|x-y|<\delta \overset{(*)}{\Longrightarrow} |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

(2) $x,y \geq M \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

(3) $x<M<y$ και $|x-y|<\delta$. Τότε $(x, M \in [\alpha, M]) \wedge (|x-M| < |x-y| < \delta) \overset{(*)}{\Longrightarrow} |f(x)-f(M)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Επίσης, $y, M \geq M \overset{(**)}{\Longrightarrow} |f(M)| < \frac{\varepsilon}{4}$, $|f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$

Τότε, $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(M)| + |f(M)-f(y)| \leq |f(x)-f(M)| + |f(M)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$. □