Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 13ο (19-05-2014)

Ορισμός (Συνέχεια)

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$.

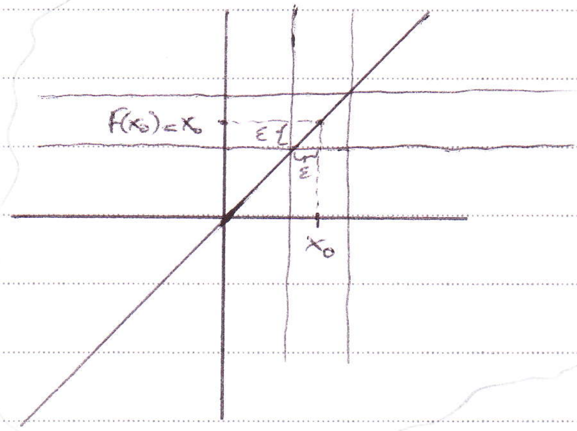
Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν:

"$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$".

Λέμε ότι η f είναι <u>συνεχής</u> αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$.

Παραδείγματα

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$



Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και έστω $\varepsilon > 0$.

Επιλέγουμε $\delta = \varepsilon$.

Αν $x \in \mathbb{R}$ και $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$, τότε:

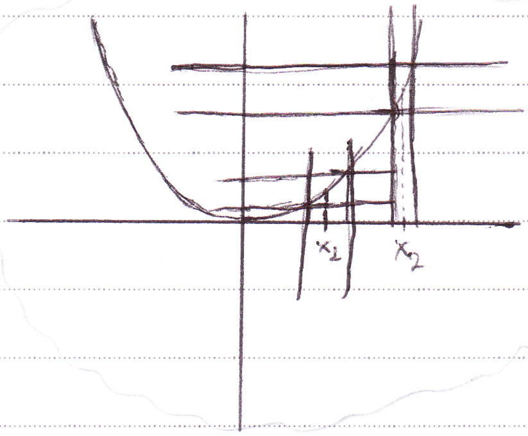
$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$.

Με βάση τον ορισμό, η f είναι συνεχής στο x_0.

Το x_0 ήταν τυχόν, άρα η f είναι συνεχής.

[Παρατήρηση: Το δ εξαρτάται μόνο απ'το ε και όχι απ'το x_0.]

(2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$



<u>Η g είναι συνεχής.</u>

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και έστω $\varepsilon > 0$.

<u>Ζητάμε $\delta > 0$:</u> αν $x \in \mathbb{R}$ και $|x - x_0| < \delta$,

τότε $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

Θα απαιτήσουμε $\delta \leq 1$.

Γράφουμε $|x^2 - x_0^2| = |x + x_0| \cdot |x - x_0| \leq (\underbrace{|x - x_0| + |x_0|}_{|x|} + |x_0|)|x - x_0| \leq (2|x_0| + 1)|x - x_0|$

αν δεχτούμε ότι $|x-x_0|\le 1$.

Θέτουμε $\delta=\min\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\}>0$

Αν $|x-x_0|<\delta$, τότε $|f(x)-f(x_0)|\le(2|x_0|+1)|x-x_0|<(2|x_0|+1)\delta\le\varepsilon$.

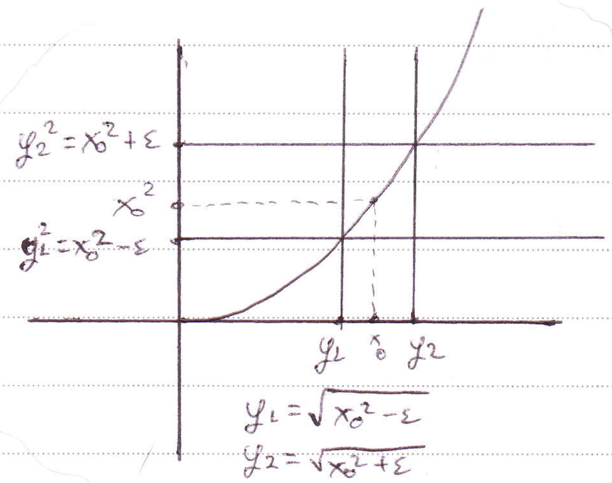
[Παρατήρηση: $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$ Εξαρτάται και από το ε και από το σημείο που ελέγχουμε τη συνέχεια.]

Ποιο είναι το "καλύτερο" δ;

Παίρνω: $x_0>0$, $0<\varepsilon<x_0^2$.

$$x_0-y_1=x_0-\sqrt{x_0^2-\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{x_0+\sqrt{x_0^2-\varepsilon}}$$

$$y_2-x_0=\sqrt{x_0^2+\varepsilon}-x_0=\frac{\varepsilon}{x_0+\sqrt{x_0^2+\varepsilon}}<x_0-y_1.$$



Ομοιόμορφη Συνέχεια

Προκαταρκτικός ορισμός:

Λέμε ότι η $f:A\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, αν ικανοποιείται ο ορισμός της συνέχειας για κάθε $x\in A$, για κάθε $\varepsilon>0$ και με δ ανεξάρτητο από το x (εξαρτάται μόνο απ'το ε).

- f συνεχής: $\forall x\in A$ (f συνεχής στο x) $\Leftrightarrow$
  $\forall x\in A\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon,x):$ ($y\in A$ και $|y-x|<\delta\Rightarrow|f(y)-f(x)|<\varepsilon$)

- f ομ. συνεχής: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon): \forall x\in A$ ($y\in A$ και $|y-x|<\delta\Rightarrow|f(y)-f(x)|<\varepsilon$) $\Leftrightarrow$
  $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0: \forall x\in A\ \forall y\in A\ (|y-x|<\delta\Rightarrow|f(y)-f(x)|<\varepsilon)$

Ορισμός (Ομοιόμορφη Συνέχεια)

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται ομοιόμορφα συνεχής αν:
"$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: για κάθε ζευγάρι σημείων $x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$, ισχύει $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$".

Πρόταση 1

Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε είναι συνεχής.

Απόδειξη

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

Έστω $\varepsilon > 0$.

Αφού η f είναι ομ. συνεχής $\exists \delta > 0 : \forall x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \xrightarrow[\text{για } y = x_0]{\text{ειδικότερα}} \forall x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
$\Rightarrow f$ συνεχής στο x_0.

Το x_0 ήταν τυχόν, άρα f συνεχής. ■

Πρόβλημα: Μας δίνουν μια συνεχή συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$. Πώς θα αποφασίσουμε αν είναι ομοιόμορφα συνεχής ή όχι;

Ορισμός (Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις)

Η $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται:

(a) Lipschitz συνεχής, αν $\exists M > 0$:
$$\forall x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$

(b) Hölder συνεχής με εκθέτη $a > 0$, αν $\exists M > 0$:
$$\forall x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^a$$

Πρόταση 2

Κάθε Hölder συνεχής $f: A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$.

Επιλέγουμε $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/a}$.

Έστω $x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$.

Τότε $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^a < M \cdot \delta^a = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. ■

Παρατηρήσεις:

(1) Κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι Hölder με εκθέτη $a = 1 \xrightarrow{\Pi.2}$ ομοιόμορφα συνεχής.

(2) Αν η f είναι Hölder συνεχής με εκθέτη $a > 1$, τότε η f είναι σταθερή.

Απόδειξη

Έστω $x_0 \in I$.

Έχουμε, για $x \neq x_0$: $\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq \frac{M|x-x_0|^a}{|x-x_0|} = M|x-x_0|^{(a-1)>0} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

Άρα, $f'(x_0) = 0$ και αφού το $x_0 \in I$ ήταν τυχόν, η f είναι σταθερή. ■

(3) $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

Ισχύει: $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$ $\forall x, y \geq 0$

Απόδειξη

$\forall a, b \geq 0$ $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (διότι $a + b \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + \sqrt{ab}$)

Άρα, $\sqrt{x} = \sqrt{y + (x-y)} \leq \sqrt{y} + \sqrt{x-y}$, αν $x \geq y$

$\Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{x-y} = \sqrt{|x-y|}$

Άρα, η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Όμως, η f <u>δεν</u> είναι Lipschitz συνεχής:

Θα υπήρχε $M > 0$: $\forall x, y \geq 0$ $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M|x-y| \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \geq 0$ $|\sqrt{x} - 0| \leq M|x - 0| \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \geq 0$ $\sqrt{x} \leq Mx$, δηλαδή $M\sqrt{x} \geq 1$ ■

0

(4) Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής (ενώ είναι συνεχής)

Απόδειξη

Έστω ότι είναι.

Παίρνουμε $\varepsilon=1$.

Υπάρχει $\delta>0$: $\forall x,y\in\mathbb{R}$ με $|x-y|<\delta$ ισχύει $|x^2-y^2|<1$

$\Rightarrow \forall y>0$ (και για $x=y+\frac{\delta}{2}$, οπότε $|x-y|=\frac{\delta}{2}<\delta$) πρέπει να ισχύει $|(y+\frac{\delta}{2})^2-y^2|<1$

$\Rightarrow \forall y>0 \quad \cancel{y^2}+y\delta+\frac{\delta^2}{4}-\cancel{y^2}<1$

$\Rightarrow \forall y>0 \quad y\delta<1 \Rightarrow \forall y>0 \quad y<\frac{1}{\delta}$, άτοπο ■

(5) Η $f:[-B,B]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ είναι ομ. συνεχής

Απόδειξη

Για κάθε $x,y\in[-B,B]$ έχουμε $|f(x)-f(y)|=|x^2-y^2|=$

$=|x-y|\,|x+y|\leq(|x|+|y|)|x-y|\leq \underbrace{2B}_{\text{Lipschitz}}|x-y|$ ■

Πρόταση 3

f Lipschitz $\iff$ f' φραγμένη.

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Ξέρουμε ότι $\exists M>0 : \forall x,y\in I \quad |f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$

Θα δείξουμε ότι: $\forall x_0\in I \quad |f'(x_0)|\leq M$

Έχουμε $\forall x\neq x_0 \quad \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leq M$ και $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0)$

Άρα, $|f'(x_0)|\leq M$.

($\Leftarrow$) Ξέρουμε ότι $\exists M>0 : \forall \xi\in I \quad |f'(\xi)|\leq M$

Έστω $x\neq y$ στο I.

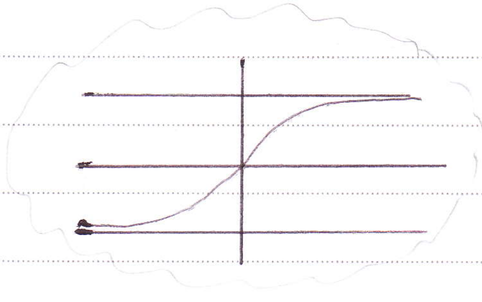
Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ξ ανάμεσα στα x και y ώστε: $f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y) \Rightarrow |f(x)-f(y)|=|f'(\xi)|\,|x-y|\leq$

$\leq M|x-y|$ ■

Στην πράξη, αν η f είναι παραγωγίσιμη, μια ιδέα είναι να βρούμε την f' και αν αυτή είναι φραγμένη συνάρτηση τότε έχουμε f Lipschitz $\Rightarrow$ f ομ. συνεχής.

<u>Παραδείγματα</u>

(1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\text{τοξεφ}(x)$



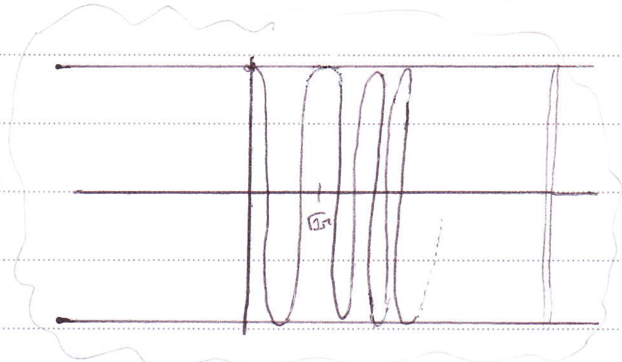
$0<f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\leq 1$

Είναι Lipschitz $\Rightarrow$ ομ. συνεχής.

(2) $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

$|f'(x)|=\left|-\frac{1}{x^2}\right|=\frac{1}{x^2}\underset{x\geq 1}{\leq} 1$

(3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\text{συν}(x^2)$



Έχουμε μια φραγμένη συνάρτηση

$|f(x)|=|\text{συν}(x^2)|\leq 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$x^2=2\kappa\pi$

$\sqrt{2(\kappa+1)\pi}-\sqrt{2\kappa\pi}=\frac{2\pi}{\sqrt{2(\kappa+1)\pi}+\sqrt{2\kappa\pi}}\xrightarrow[\kappa\to\infty]{}0$

$f'(x)=-2x\,\text{ημ}(x^2)$

Στα σημεία $x_\kappa=\sqrt{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}$ έχουμε $|\text{ημ}(x_\kappa^2)|=|\text{ημ}(\kappa\pi+\frac{\pi}{2})|=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |f'(x_\kappa)|=2\sqrt{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}\xrightarrow[\kappa\to+\infty]{}+\infty$

Άρα η f' δεν είναι φραγμένη.

Θεωρώ τα σημεία $x_\kappa=\sqrt{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}$ και $y_\kappa=\sqrt{\kappa\pi}$

Έχουμε: (i) $|x_\kappa-y_\kappa|=\sqrt{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\kappa\pi}=\frac{\pi/2}{\sqrt{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{\kappa\pi}}\xrightarrow[\kappa\to\infty]{}0$

(ii) $|f(x_\kappa)-f(y_\kappa)|=|\text{συν}(\kappa\pi+\frac{\pi}{2})-\text{συν}(\kappa\pi)|=1$

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι ομ. συνεχής.

Τότε, για $\varepsilon=\frac{1}{2}$ $\exists\delta>0$: $|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}$.

Παίρνω κ αρκετά μεγάλο ώστε $|x_\kappa-y_\kappa|<\delta$ (μπορώ γιατί $|x_\kappa-y_\kappa|\to 0$)

Τότε $1=|f(x_\kappa)-f(y_\kappa)|<\frac{1}{2}$, άτοπο.