Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 10ο (12-05-2014)

Κριτήριο Dirichlet

Έστω (a_k), (b_k) δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών.
Ορίζουμε $s_0 = 0$ και $s_n = a_1 + \dots + a_n$, για $n \geq 1$.
Υποθέτουμε ότι: (1) Η (s_n) είναι φραγμένη: $\exists M > 0 : |s_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$
(2) Η (b_k) είναι φθίνουσα και $b_k \searrow 0$

Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Λήμμα (άθροιση κατά μέρη)

Αν $1 \leq m < n$ τότε $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m$

Απόδειξη

$a_k = s_k - s_{k-1}$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n} s_{k-1} b_k \overset{r=k-1}{=\!=} \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{r=m-1}^{n-1} s_r b_{r+1} =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k b_{k+1} = \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_k + s_n b_n - \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_{k+1} - s_{m-1} b_m =$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m. \quad \blacksquare$$

Απόδειξη (Κριτηρίου Dirichlet)

Από το κριτήριο Cauchy για σειρές, αρκεί να δείξουμε ότι:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$: αν $n > m \geq n_0$ τότε $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\right| < \varepsilon$.

Από το Λήμμα, έχουμε:

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_m b_{m+1}\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n-1} |s_k| \underbrace{(b_k - b_{k+1})}_{\geq 0} + |s_n| \underbrace{b_n}_{\geq 0} + |s_m| \underbrace{b_{m+1}}_{\geq 0}$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n-1} M (b_k - b_{k-1}) + M b_n + M b_{m+1} = M (b_{m+1} - \cancel{b_{m+2}} + \cancel{b_{m+2}} - \cancel{b_{m+3}} + \dots + \cancel{b_{n-1}} - \cancel{b_n} + \cancel{b_n} + b_{m+1})$$

Δηλαδή, $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\right| \leq 2 M b_{m+1}$

Αφού $b_k \to 0$ $\exists n_0 : \forall k \geq n_0$ $|b_k| < \frac{\varepsilon}{2M}$

Τότε, προηγ. πράξεις δείχνουν ότι αν $n > m \geq n_0$ τότε

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\right| \leq 2M b_{m+1} \underset{m+1 > n_0}{<} \cancel{2M} \frac{\varepsilon}{\cancel{2M}} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

Βασικές Εφαρμογές

1 Εναλλάσσουσες σειρές (Κριτήριο Leibniz)

Αν (b_k) φθίνουσα και $b_k \to 0$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$ συγκλίνει.

Απόδειξη

Για την $a_k = (-1)^{k-1}$, έχουμε $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, $s_4 = 0$, ...

Άρα, $|s_n| \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αφού $b_k \downarrow 0$, από το κριτήριο Dirichlet, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$ συγκλίνει. $\blacksquare$

Παραδείγματα

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει διότι $\frac{1}{\sqrt{k}} \downarrow 0$ (ενώ $\sum \left|\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right| = \sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ αποκλίνει)
- $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\ln k}$ συγκλίνει διότι $\frac{1}{\ln k} \downarrow 0$.

2 Τριγωνομετρικές σειρές

$2\eta\mu a \, \eta\mu b = \sigma\upsilon\nu(a-b) - \sigma\upsilon\nu(a+b)$
(!) $\sigma\upsilon\nu(a-b) = \sigma\upsilon\nu a \, \sigma\upsilon\nu b + \eta\mu a \, \eta\mu b$
$\sigma\upsilon\nu(a+b) = \sigma\upsilon\nu a \, \sigma\upsilon\nu b - \eta\mu a \, \eta\mu b$

Παράδειγμα

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta\mu(kx)}{\sqrt{k}}$, $0 < x < 2\pi$.

$a_k = \eta\mu(kx)$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{k}} \downarrow 0$.

Θα φράξουμε το $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| = |\eta\mu x + \eta\mu(2x) + \dots + \eta\mu(nx)|$.

Το τέχνασμα: γράφουμε $\eta\mu x + \eta\mu(2x) + \dots + \eta\mu(nx) =$

$$= \frac{1}{2\eta\mu(\frac{x}{2})}\left(2\eta\mu\frac{x}{2}\eta\mu x + 2\eta\mu\frac{x}{2}\eta\mu(2x) + \dots + 2\eta\mu\frac{x}{2}\eta\mu(nx)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\eta\mu\frac{x}{2}}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} - \cancel{\sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2}} + \cancel{\sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2}} - \cancel{\sigma\upsilon\nu\frac{5x}{2}} + \cancel{\dots} + \cancel{\sigma\upsilon\nu(n-\tfrac{1}{2})x} - \sigma\upsilon\nu(n+\tfrac{1}{2})x\right) =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} - \sigma\upsilon\nu(n+\frac{1}{2})x}{2\eta\mu\frac{x}{2}}$$

Άρα, $|a_1 + \dots + a_n| \le \dfrac{|\text{συν}\frac{x}{2}| + |\text{συν}(n+\frac{1}{2})x|}{2\text{ημ}\frac{x}{2}} \le \dfrac{2}{2\text{ημ}\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\text{ημ}\frac{x}{2}} = M$.

Από το κριτήριο Dirichlet, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{ημ}(kx)}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει.

Ασκήσεις

25 Έστω $a_k \ge 0$.

Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+k^2 a_k}$ συγκλίνει.

Λύση

- Αν $a_k = 0$ τότε $\frac{a_k}{1+k^2a_k} = 0 < \frac{1}{k^2}$
- Αν $a_k > 0$ τότε $\frac{a_k}{1+k^2a_k} < \frac{a_k}{k^2 a_k} = \frac{1}{k^2}$

$\Big\}\ \forall k \quad \left|\frac{a_k}{1+k^2a_k}\right| < \frac{1}{k^2}$.

Αφού η $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+k^2a_k}$ συγκλίνει. □

26 Ορίζουμε $a_k = \begin{cases} \frac{1}{k^2}, & \text{αν ο } k \text{ δεν είναι τετράγωνο φυσικού} \\ \frac{1}{k}, & \text{αν ο } k \text{ είναι τετράγωνο φυσικού.} \end{cases}$

Εξετάστε αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Λύση

$a_k: 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \underset{\frac{1}{2^2}}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{4}}}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2}, \frac{1}{7^2}, \frac{1}{8^2}, \underset{\frac{1}{3^2}}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{9}}}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{11^2}, \frac{1}{12^2}, \dots$

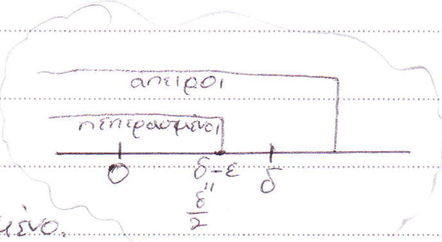
Θα δείξουμε ότι η ακολουθία (s_n) είναι φραγμένη, και αφού $a_k > 0$, η σειρά συγκλίνει.

Γράφουμε $s_{n^2} = \sum_{k=1}^{n^2} a_k = \sum_{\substack{1\le k\le n^2 \\ k \text{ όχι τέλειο} \\ \text{τετράγωνο}}} a_k + \sum_{\substack{1\le k\le n^2 \\ k \text{ τέλειο} \\ \text{τετράγωνο}}} a_k = \sum_{\substack{1\le k\le n^2 \\ \text{όχι}}} \frac{1}{k^2} + \sum_{1\le m\le n} a_{m^2} =$

$= \sum_{\substack{1\le k\le n^2 \\ \text{όχι}}} \frac{1}{k^2} + \sum_{1\le m\le n} \frac{1}{m^2} \le \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k^2} + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} < 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = M$

Τότε, $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε $n \le n^2 \xrightarrow{(s_n)\nearrow} s_n \le s_{n^2} \le M$. □

E22 Αν $a_k \geq 0$ και η $\sum a_k$ συγκλίνει, τότε $\liminf(k a_k) = 0$



Λύση (απαγωγή σε άτοπο)

Υποθέτουμε ότι $\liminf(k a_k) = \delta > 0$

Για $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ το $\{k : k a_k < \delta - \varepsilon = \frac{\delta}{2}\}$ είναι πεπερασμένο.

Δηλαδή, $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 \quad k a_k \geq \delta/2 \Rightarrow a_k \geq \frac{\delta}{2k}$

Αν υποθέσω ότι η $\sum a_k$ συγκλίνει, τότε η

$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\delta}{2k}$ (κριτήριο σύγκρισης: $\forall k \geq k_0 \quad 0 < \frac{\delta}{2k} \leq a_k$)

Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ συγκλίνει. Άτοπο. □

Ερώτηση: Ισχύει το ισχυρότερο $\limsup(k a_k) = 0$, αν η $\sum a_k$ συγκλίνει;

Απάντηση: ΟΧΙ

Για την (a_k) της άσκ. 26, έχουμε:

$k^2 a_{k^2} = k^2 \frac{1}{k^2} = 1 \to 1$

Άρα, $\limsup(k a_k) \geq 1$.

29 Αν $a_k \geq 0$, $(a_k) \downarrow$ και η $\sum a_k$ συγκλίνει, τότε $k a_k \to 0$.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Cauchy.

Έστω $\varepsilon > 0$.

Αφού η $\sum a_k$ συγκλίνει, $\exists n_0 : \forall n > m \geq n_0 \quad |a_{m+1} + \dots + a_n| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Παίρνουμε $n > 2n_0$ και $m = n_0$ έτσι ώστε: $n - m > n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$.

Έχουμε: για $n > 2n_0$ $\quad \frac{n}{2} a_n < (n-m) a_n \leq a_{m+1} + \dots + a_n < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow n a_n < \frac{2\varepsilon}{4} < \varepsilon$.

Άρα $n a_n \to 0$. □

Ε11 Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{10^k}$

<u>Λύση:</u> $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{10}}{10^{k+1}} \cdot \frac{10^k}{k^{10}} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{10} \cdot \frac{1}{10} \longrightarrow 1 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10} < 1$

Άρα η σειρά συγκλίνει.

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$

<u>Βασικό:</u> $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^A}{e^x} = 0 \Rightarrow \exists M: \forall x > M \quad e^x > x^A$

<u>Λύση:</u> Για $x = \sqrt{k}$ έχουμε:

$\exists k_0 \in \mathbb{N}: \forall k \geq k_0 \quad e^{\sqrt{k}} > (\sqrt{k})^4 \iff 0 < \frac{1}{e^{\sqrt{k}}} < \frac{1}{k^2}$

Από κριτήριο σύγκρισης (αφού η $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει)

η $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{k}}}$ συγκλίνει $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{k}}}$ συγκλίνει.

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k k!}{k^k}$

Η γενική: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k k!}{k^k}$, $a > 0$.

<u>Λύση:</u> $\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} = \frac{a^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{a^k k!} = a \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \longrightarrow \frac{a}{e}$.

Τύπος του Stirling

$k! \sim \underbrace{\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}}_{\varepsilon_k}$

$\frac{k!}{\varepsilon_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$

- $a = 2 \Longrightarrow \frac{2}{e} < 1$, άρα συγκλίνει.
- $a = 3 \Longrightarrow \frac{3}{e} > 1$, άρα αποκλίνει.
- $a = e \Rightarrow \frac{e}{e} = 1$

Άρα, $\sum \frac{e^k k!}{k^k} \sim \sum \frac{\cancel{e^k}}{\cancel{k^k}} \cdot \frac{\cancel{k^k}}{\cancel{e^k}} \sqrt{2\pi k}$, που αποκλίνει. □