Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 7ο (05-05-2014)

(a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Ορίζουμε $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Αν υπάρχει $s \in \mathbb{R}$: $s_n \to s$ τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει στον s και γράφουμε $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (αλλιώς λέμε ότι η σειρά αποκλίνει).

<u>Πρόταση 1</u>: Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $a_k \to 0$.

<u>Πρόταση 2</u>: Αν $a_k \geq 0$ $\forall k$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει <u>αν και μόνο αν</u> η (s_n) είναι άνω φραγμένη (δηλ. $\exists M > 0: \forall n \in \mathbb{N}$ $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq M$)

<u>Πρόταση 3</u> (κριτήριο συμπύκνωσης): Αν η (a_k) είναι <u>φθίνουσα</u> ακολουθία μη αρνητικών αριθμών και $a_k \searrow 0$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.

(Δηλ. η $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots$ συγκλίνει)

<u>Απόδειξη</u> (Πρότασης 3)

Ορίζουμε $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $t_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 2^{n-1} a_{2^{n-1}}$.

$(\Leftarrow)$ Ξέρουμε ότι $\exists M > 0: \forall m \in \mathbb{N}$ $t_m \leq M$.

Θα δείξουμε ότι: $\forall n \in \mathbb{N}$ $s_n \leq M \overset{\text{Π2}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Γράφουμε
$$s_{2^n-1} = a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3)}_{\leq 2a_2} + \underbrace{(a_4 + a_5 + a_6 + a_7)}_{\leq 4a_4} + \dots + \underbrace{(a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n-1})}_{\leq 2^{n-1} a_{2^{n-1}}}$$

$2^n - 1 - 2^{n-1} + 1 = 2^{n-1}$

$$\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} = t_n \leq M$$

Θεωρούμε τυχαίο φυσικό $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $\exists r \in \mathbb{N}: n < 2^r - 1 \overset{(s_n)\nearrow}{\Longrightarrow} s_n \leq s_{2^r-1} \leq M$.

$(\Rightarrow)$ Ξέρουμε ότι η (s_n) είναι φραγμένη: $\exists M > 0: \forall n$ $s_n \leq M$.

Θα δείξουμε ότι η (t_n) είναι φραγμένη: γράφουμε

$$t_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}}$$
$$\leq 2(a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-2} a_{2^{n-1}})$$

$\leq 2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+\dots+a_{2^{n-2}+1}+\dots+a_{2^{n-1}-1}+a_{2^{n-1}})$

$= 2 s_{2^{n-1}} \leq 2M$

Αφού η (t_n) είναι άνω φραγμένη, από $2M$, η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει ■

Εφαρμογές

I Έστω $p>0$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ $\begin{cases} \to \text{συγκλίνει αν } p>1 \\ \to \text{αποκλίνει αν } p\leq 1 \end{cases}$

II Η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$, $p>0$.

Κριτήριο συμπύκνωσης: έχουμε $\frac{1}{k(\log k)^p} \searrow 0$

Θεωρούμε την $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \cancel{2^k} \cdot \frac{1}{\cancel{2^k}(\log 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k \log 2)^p} =$

$= \frac{1}{(\log 2)^p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει, αν $p>1$ και αποκλίνει, αν $p\leq 1$.

Αφού το κριτήριο συμπύκνωσης είναι ισοδυναμία (αν και μόνο αν) έχουμε $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$ συγκλίνει αν $p>1$ και αποκλίνει αν $p\leq 1$.

(π.χ. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^2 k}$ συγκλίνει, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$ αποκλίνει)

Ο αριθμός e

Ορισμός

Η ακολουθία $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη (δείχθηκε στον ΑΠΙ) Άρα, συγκλίνει.

Ορίζουμε $e = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Πρόταση

$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$ (συμφωνούμε $0!=1$.)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\cancel{(n-k)!}(n-k+1)\cdots n}{k!\,\cancel{(n-k)!}}$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Ορίζουμε $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Γράφουμε: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$

$$= 1 + \cancel{n}\cdot\frac{1}{\cancel{n}} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\overset{\le 1}{\left(\frac{n}{n}\right)}\overset{\le 1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)} + \dots + \frac{1}{k!}\overset{\le 1}{\left(\frac{n}{n}\right)}\overset{\le 1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)}\cdots\overset{\le 1}{\left(\frac{n-k+1}{n}\right)} + \dots + \frac{1}{n!}\overset{\le 1}{\left(\frac{n}{n}\right)}\overset{\le 1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)}\cdots\overset{\le 1}{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} = S_{n+1}.$$

Δηλαδή, $a_n \le S_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ή $a_k \le S_{k+1}$ $\forall k$ ✱

Στην αντίθετη κατεύθυνση σταθεροποιούμε ένα κ και θεωρούμε $n>k$.

Ξαναγράφουμε $(\forall n>k)$ $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}(1)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\ge 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\underbrace{(1)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\to 1} + \dots + \frac{1}{k!}\underbrace{(1)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{\to 1}.$$

Άρα $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1)\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}(1)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \to 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}$

Άρα $e \ge 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} = S_{k+1}$ $\forall k$.

Άρα, $S_{n+1} \to s \le e$

Αυτό δείχνει ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ συγκλίνει και $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = s \le e$.

Τέλος, από την ✱ $\underbrace{a_n}_{\to e} \le \underbrace{S_{n+1}}_{\substack{\text{ξέρω} \\ \to s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}}}$

Άρα $e \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Επομένως, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$. ∎

Εφαρμογή

Ο $e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι ο e είναι ρητός.

Τότε, υπάρχουν $m,n\in\mathbb{N}: e=\frac{m}{n}=\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)+\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\dots\right)$.

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{m}{n}\cdot n!}_{\text{φυσικός}}=\Big(\underbrace{n!}_{\text{φυσικός}}+\underbrace{\frac{n!}{1!}}_{\text{φυσικοί}}+\underbrace{\frac{n!}{2!}}_{\text{φυσικοί}}+\dots+\underbrace{\frac{n!}{n!}}_{\text{φυσικός}}\Big)+\left(\frac{n!}{(n+1)!}+\frac{n!}{(n+2)!}+\dots\right)$$

Αφαιρώντας έχουμε: ο $\frac{n!}{(n+1)!}+\frac{n!}{(n+2)!}+\frac{n!}{(n+3)!}+\dots$ είναι φυσικός.

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\dots\geq 1$$

Όμως,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\dots\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dots$$
$$\le\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots$$
$$=\frac{2}{3}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{2^k}=$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{2^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}<1$$

Άτοπο. ∎

Γενικά κριτήρια για την σύγκλιση σειρών

Δίνεται μια ακολουθία (a_k) (δεν ξέρουμε ότι $a_k\geq 0\ \forall k$)

Θεωρούμε την $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$.

Πρόταση

Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ συγκλίνει τότε η $\sum_{k=1}a_k$ συγκλίνει.

Απόδειξη

Ορίζουμε $s_n=a_1+a_2+\dots+a_n$, $t_n=|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|$

Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ συγκλίνει, από το κριτήριο Cauchy, η (t_n) είναι βασική. Θα δείξουμε ότι και η (s_n) είναι βασική, οπότε (λόγω από κριτήριο Cauchy) η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(*) Για $m>n$ $|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \dots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_m| = t_m - t_n = |t_m - t_n|$

Έστω $\varepsilon > 0$.

(t_n) βασική $\Rightarrow \exists n_0 : \forall m,n \geq n_0 \quad |t_m - t_n| < \varepsilon$.

Τότε, αν $n, m \geq n_0$ (και μπορώ να υποθέσω ότι $m>n$) γράφουμε

$|s_m - s_n| \overset{(*)}{\leq} |t_m - t_n| < \varepsilon$

Άρα, η (s_n) είναι βασική. ∎

<u>Ορισμός</u>

Λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ <u>συγκλίνει απολύτως</u> αν η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει.

Με αυτήν την ορολογία η πρόταση μας λέει: αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(kx)}{k^2}$ συγκλίνει.

Θεωρούμε την:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sigma\upsilon\nu(kx)}{k^2} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$ η οποία συγκλίνει.

Άρα, η $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sigma\upsilon\nu(kx)}{k^2} \right|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(kx)}{k^2}$ συγκλίνει.