

Απειροστικός Λογισμός II
Ενδιάμεση Εξέταση - 26-11-2022

Θέμα 1ο.

- (α) Βρείτε παράδειγμα φραγμένης ακολουθίας (a_n) με την ιδιότητα $\limsup a_n < a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
- (β) Αποδείξτε ότι αν ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_n) = 0$ και η υπακολουθία (b_{2n}) συγκλίνει, τότε και η ακολουθία (b_n) συγκλίνει.
- (γ) Αποδείξτε ότι αν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ να συγκλίνει.

Θέμα 2ο.

(α) Εξετάστε αν είναι αληθής ή ψευδής καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

- (i) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.
- (ii) Αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ συγκλίνουν, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση καθεμιά από τις ακόλουθες σειρές:

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k^4 + 1} - k^2), \quad (ii) \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2}, \quad (iii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{1}{k}\right).$$

Θέμα 3ο.

(α) Αποδείξτε ότι, αν η συνάρτηση $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε είναι φραγμένη.

(β) Εξετάστε αν είναι ομοιόμορφα συνεχείς οι συναρτήσεις:

(i) $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos(\sqrt{x})$.

(ii) $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln x$.

Θέμα 4ο.

(α) Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα η $|g|$ να είναι ολοκληρώσιμη, αλλά η g όχι.

(β) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b f(x) dx > 0$.

(i) Αποδείξτε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$, τέτοια ώστε $L(f, P) > 0$.

(ii) Αποδείξτε ότι υπάρχει διάστημα $[c, d] \subseteq [a, b]$, τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [c, d]$.

Τα τέσσερα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και έχουν συνολική αξία 12 μονάδων.

Καλή Επιτυχία