

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ
08/02/2022

1. Έστω $(a_n), (b_n)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Ισχύουν ή όχι οι επόμενες προτάσεις; Αν ναι, να τις αποδείξετε. Αν όχι, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

(i) Αν $a_{2n} \rightarrow a \in \mathbb{R}$ και $a_{3n} \rightarrow b \in \mathbb{R}$, τότε $a = b$.

(ii) Αν $\limsup a_n = a \in \mathbb{R}$ και $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$, τότε $\limsup a_n b_n = ab$.

(iii) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ συγκλίνει.

(iv) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και (a_{k_n}) είναι υπακολουθία της (a_n) , τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει.

2. (α) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα \sup, \inf, \limsup και \liminf της ακολουθίας $b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

(β) Εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k \cdot k!}{k^k}$$

3. (α) Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι Lipschitz ή/και ομοιόμορφα συνεχείς:

(i) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

(ii) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin x$.

(β) Αν $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς, με $f > 0$, να εξετάσετε την ομοιόμορφη συνέχεια των $f \cdot g$ και $\frac{1}{f}$.

4. (α) Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, η οποία ικανοποιεί την

$$f(x)^2 = 2 \int_0^x f(t) dt$$

για κάθε $x \geq 0$. Δείξτε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \geq 0$.

(β) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\int x^2 \ln x dx \quad \int \sin^3 x \cos^2 x dx \quad \int \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} dx$$

5. (α) Έστω $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ συνεχής, φθίνουσα. Να ελέγξετε αν ισχύει κάθε μια από τις δύο κατευθύνσεις της ισοδυναμίας

$$\exists \int_0^{+\infty} g(x) dx \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

(β) Να υπολογίσετε το πολυώνυμο Taylor τάξης n στο σημείο 0 της $f(x) = xe^x$ και να βρείτε για ποιά x η $f(x)$ συμπίπτει με την αντίστοιχη δυναμοσειρά.