Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 1ο Κλιμάκιο
1 Σεπτεμβρίου 2021

1. (1 μον.) Έστω (z_n) φραγμένη ακολουθία η οποία δεν συγκλίνει. Αποδείξτε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a < b$ τέτοιοι ώστε: άπειροι όροι της (z_n) ικανοποιούν την $z_n < a$ και άπειροι όροι της (z_n) ικανοποιούν την $z_n > b$. [*Υπόδειξη:* Εξηγήστε αρχικά γιατί $\liminf z_n < \limsup z_n$.]

2. (1.5+1.5 μον.) (α) Έστω (a_k) και (b_k) ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνουν. Εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k b_k}.$$

(β) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει κάθε μία από τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

3. (2 μον.) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις συναρτήσεις $f, g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}(\ln x)^2$ και $g(x) = x^2$.

4. (1+2 μον.) (α) Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b g(x)dx > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει διάστημα $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ τέτοιο ώστε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [\gamma, \delta]$. [*Υπόδειξη:* Εξηγήστε πρώτα γιατί υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ τέτοια ώστε $L(g, P) > 0$.]
(β) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}, \qquad \int \cos^3 x \, \sin^2 x \, dx.$$

5. (1+2 μον.) (α) Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx(1-x^2)^n \, dx.$$

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής και 1-περιοδική συνάρτηση (δηλαδή, $f(x) = f(x+1)$ για κάθε $x \geq 0$). Υποθέτουμε ότι:

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt < +\infty.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \geq 0$. [*Υπόδειξη:* Εξηγήστε πρώτα γιατί αν υπάρχει $x \in [0, 1]$ με $f(x) > 0$ τότε $\int_0^1 f(t)dt > 0$.]

Καλή Επιτυχία!

Απειροστικός Λογισμός II – 2ο Κλιμάκιο

1 Σεπτεμβρίου 2021

1. (1 μον.) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και (x_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι
$$\liminf f(x_n) \leqslant f(\liminf x_n).$$

2. (1.5+1.5 μον.) (α) Έστω (α_k) ακολουθία (όχι απαραίτητα θετικών) πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k}$ συγκλίνει.

(β) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει κάθε μία από τις παρακάτω σειρές:
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{k}\right).$$

3. (2 μον.) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις συναρτήσεις $f,g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=x\sin x$.

4. (1+2 μον.) (α) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}$, δείξτε ότι
$$\int_a^b f(x)dx=0.$$

(β) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα
$$\int\frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx, \qquad \int x\cos^2 x\,dx.$$

5. (1+2 μον.) (α) Να βρεθεί το
$$\lim_{n\to\infty}\int_1^2\frac{\sin(nx)}{x}\,dx.$$

(β) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$. Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχή παράγωγο και ότι $0<f'(x)\le 1$ για κάθε $x\in[0,1]$. Αποδείξτε ότι
$$\int_0^t [f(x)]^3dx \le \left(\int_0^t f(x)\,dx\right)^2$$
για κάθε $t\in[0,1]$.

Καλή Επιτυχία!