

Απειροστικός Λογισμός II
Εαρινό εξάμηνο 2019-20 (17/6/2020)
Τελική Εξέταση - 1ο Κλιμάκιο

Οδηγίες

A. Διάρκεια εξέτασης: **90 λεπτά**.

B. **Να απαντήσετε σε 3 από τα 4 θέματα.** Στο πάνω μέρος της κόλλας σας να γράψετε:

1ο Κλιμάκιο. Θέλω να βαθμολογηθούν τα Θέματα: (π.χ. 1, 2, 3)

Γ. $\log x = \ln x = 0$ Νεπέριος λογάριθμος του x .

Θέμα 1ο ($2 \times 1 + 2 \times 0,8 = 3,6$ Μονάδες)

(α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές:

$$(i) \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2} \quad (ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k^\alpha}, \text{ για τις διάφορες τιμές του } \alpha > 0.$$

(β) Δίνεται ακολουθία (a_k) με $a_k > 0$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι:

(i) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(ii) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ συγκλίνει.

Θέμα 2ο ($1,6 + 2 = 3,6$ Μονάδες)

(α) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τη συνάρτηση

$$f(x) = x \log x, \quad x \in (0, 1].$$

(β) Αν οι $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις, αποδείξτε ότι και η σύνθεση $f \circ g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

Θέμα 3ο ($2 \times 1 + 1,6 = 3,6$ Μονάδες)

(α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int \sqrt{4-x^2} dx \quad (ii) \int \log^3 x dx$$

(β) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_0^1 x^{n-1} f(x) dx \right) = f(1).$$

Θέμα 4ο ($1 + 2,6 = 3,6$ Μονάδες)

(α) Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^k}{k} + \dots$$

είναι $R = 1$.

(β) Αν $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, $x \in (-1, 1)$, αποδείξτε ότι

$$f(x) = \log \frac{1}{1-x}, \quad \text{για κάθε } x \in (-1, 1).$$

Καλή Επιτυχία

Απειροστικός Λογισμός II
Εαρινό εξάμηνο 2019-20 (17/6/2020)
Τελική Εξέταση - 2ο Κλιμάκιο

Οδηγίες

A. Διάρκεια εξέτασης: **90 λεπτά**.

B. **Να απαντήσετε σε 3 από τα 4 θέματα.** Στο πάνω μέρος της κόλλας σας να γράψετε:

2ο Κλιμάκιο. Θέλω να βαθμολογηθούν τα θέματα: (π.χ. 1, 2, 3)

Γ. $\log x = \ln x = 0$ Νεπέριος λογάριθμος του x .

Θέμα 1ο ($2 \times 1 + 1, 6 = 3, 6$ Μονάδες)

(α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές:

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \log^3 k} \quad (ii) \sum_{k=1}^{\infty} k\sqrt{k} \sin\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

(β) Δίνονται ακολουθίες (a_k) , (b_k) με $a_k > 0$, $b_k > 0$ και με την ιδιότητα

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Θέμα 2ο ($1 + 1 + 1, 6 = 3, 6$ Μονάδες)

Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τη συνάρτηση

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(α) στο διάστημα $(0, 1]$

(β) στο διάστημα $[1, +\infty)$

(γ) στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(Υπόδειξη: Στα (α) και (β) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε χωρίς απόδειξη κριτήρια που σας είναι γνωστά είτε από τη θεωρία είτε από θεωρητικές ασκήσεις, αρκεί να διατυπώσετε με σαφήνεια τα αποτελέσματα που χρησιμοποιείτε. Στο (γ) να δώσετε πλήρη απόδειξη.)

Θέμα 3ο ($1 + 1 + 1, 6 = 3, 6$ Μονάδες)

(α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx \quad (ii) \int e^{2x} \sin x dx$$

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$$

Θέμα 4ο ($1, 2 + 2, 4 = 3, 6$ Μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Δείξτε ότι η f αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 σε όλο το \mathbb{R} και βρείτε το ανάπτυγμά της.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), βρείτε την τιμή της παραγώγου 9ης τάξης $f^{(9)}(0)$ της f στο 0.

Καλή Επιτυχία

Απειροστικός Λογισμός II
Εαρινό εξάμηνο 2019-20 (17/6/2020)
Τελική Εξέταση - 3ο Κλιμάκιο

Οδηγίες

A. Διάρκεια εξέτασης: **90 λεπτά**.

B. **Να απαντήσετε σε 3 από τα 4 θέματα.** Στο πάνω μέρος της κόλλας σας να γράψετε:

3ο Κλιμάκιο. Θέλω να βαθμολογηθούν τα Θέματα: (π.χ. 1, 2, 3)

Γ. $\log x = \ln x = 0$ Νεπέριος λογάριθμος του x .

Θέμα 1ο ($2 \times 1 + 2 \times 0,8 = 3,6$ Μονάδες)

(α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές:

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k^2 + 1} - k) \quad (ii) \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\log k}{k}$$

(β) Δίνεται ακολουθία (a_n) με την ιδιότητα: $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(i) Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (a_n) συγκλίνει.

Θέμα 2ο ($3 \times 1,2 = 3,6$ Μονάδες)

(α) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τη συνάρτηση $f(x) = \log x$

(i) στο διάστημα $(0, 1]$

(ii) στο διάστημα $[1, +\infty)$.

(β) Εξετάστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας: *Το γινόμενο δύο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.*

Θέμα 3ο ($2 \times 1 + 0,6 + 1 = 3,6$ Μονάδες)

(α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx \quad (ii) \int \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} dx$$

(β) Δίνεται συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ με την ιδιότητα ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ ορίζεται και είναι πεπερασμένο.

(i) Δείξτε ότι ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x/2}^x f(t) dt = 0 .$$

(ii) Αν επιπλέον η f είναι φθίνουσα, αποδείξτε ότι ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x)) = 0 .$$

Θέμα 4ο ($2 \times 1,8 = 3,6$ Μονάδες)

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία έχει παραγώγους κάθε τάξης. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε να ισχύει $|f^{(k)}(x)| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Taylor της f με κέντρο το 0 συγκλίνει στην f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) αποδείξτε ότι

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Καλή Επιτυχία