Απειροστικός Λογισμός ΙΙ (2019-20)

Απαντήσεις Ενδιάμεσης Εξέτασης

1. (2 μον.) (α) Δίνεται ακολουθία (a_n). Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες $(a_{2k}), (a_{2k-1})$ και (a_{5k}) συγκλίνουν. Δείξτε ότι:

(i) $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} a_{5k}$.

(ii) Η ακολουθία (a_n) συγκλίνει.

(β) Εξετάστε αν είναι αληθής ή ψευδής η παρακάτω πρόταση, αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας: «Αν για μια ακολουθία (x_n) ισχύει $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$, τότε η (x_n) συγκλίνει.»

Απάντηση. (α) (i)Ας υποθέσουμε ότι $a_{2k} \to x$, $a_{2k-1} \to y$ και $a_{5k} \to z$.
Παρατηρούμε ότι η (a_{10k}) είναι κοινή υπακολουθία της (a_{2k}) και της (a_{5k}). Αφού κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει στο ίδιο όριο με την ακολουθία, συμπεραίνουμε ότι η (a_{10k}) συγκλίνει και $x = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{10k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{5k} = z$, δηλαδή $x = z$.
Από την άλλη μεριά, η (a_{10k-5}) είναι κοινή υπακολουθία της (a_{2k-1}) και της (a_{5k}). Όπως πριν, συμπεραίνουμε ότι η (a_{10k-5}) συγκλίνει και $y = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{10k-5} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{5k} = z$, δηλαδή $y = z$.
Έπεται ότι $x = y = z$.

(β) Από το (α) γνωρίζουμε ότι αν οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) της (a_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο x. Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$:
Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geqslant k_1$ ισχύει $|a_{2k} - x| < \varepsilon$. Επίσης, υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geqslant k_2$ ισχύει $|a_{2k-1} - x| < \varepsilon$. Αν θέσουμε $n_0 = \max\{2k_1, 2k_2 - 1\}$ τότε για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$.
[Πράγματι, παρατηρούμε ότι αν ο n είναι άρτιος τότε $n = 2k$ για κάποιον $k \geqslant k_1$ ενώ αν ο n είναι περιττός τότε $n = 2k - 1$ για κάποιον $k \geqslant k_2$.]
Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $a_n \to x$.

(β) Η πρόταση είναι ψευδής. Η ιδιότητα $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ δεν εξασφαλίζει ότι η ακολουθία (x_n) είναι Cauchy. Κατά συνέπεια, υπάρχουν ακολουθίες οι οποίες αποκλίνουν, αν και ικανοποιούν την $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$.
1ο Παράδειγμα: $x_n = \ln(n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Έχουμε:

$$x_{n+1} - x_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1 + \frac{1}{n}) \to 0,$$

αλλά $x_n \to +\infty$.
2ο Παράδειγμα: Αν η ακολουθία (c_n) τείνει στο 0, αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ αποκλίνει (π.χ. $c_n = \frac{1}{n}$), τότε η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της σειράς δίνει άλλο ένα τέτοιο παράδειγμα, αφού $s_{n+1} - s_n = c_{n+1} \to 0$, ενώ η (s_n) αποκλίνει.

2. (2 μον.) Δίνεται φραγμένη ακολουθία (a_n) και έστω $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(α) Δείξτε ότι ισχύει $\limsup a_n \leqslant s$.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) για την οποία ισχύει $\limsup a_n < s$.

(γ) Δείξτε ότι, αν ισχύει $a_n \neq s$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\limsup a_n = s$.

Απάντηση. (α) Έστω $x = \limsup a_n$. Τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $\lim a_{k_n} = x$. Αφού $a_{k_n} \leqslant s$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι ισχύει και $x = \lim a_{k_n} \leqslant s$.

(β) Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Τότε $s = \max\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 1$, ενώ $\limsup a_n = \lim a_n = 0$. Άρα $\limsup a_n < s$.

(γ) Έστω (a_n) ακολουθία για την οποία ισχύει $a_n \neq s$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $\lim a_{k_n} = s$. Από αυτό και τον ορισμό του $\limsup$ έπεται ότι $s \leqslant \limsup a_n$. Όμως, σύμφωνα με το (α) ισχύει και $\limsup a_n \leqslant s$, άρα τελικά θα έχουμε ότι ισχύει $\limsup a_n = s$.

Η κατασκευή της (a_{k_n}) γίνεται επαγωγικά. Χρησιμοποιούμε την υπόθεση ότι $a_n < s$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από αυτό και τον ορισμό του supremum προκύπτει ότι, για κάθε $x < s$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x < a_n < s$. Η επιλογή της ακολουθίας (k_n) γίνεται έτσι ώστε:

$$\text{(i) } k_1 < k_2 < \ldots, \quad \text{(ii) } a_{k_1} < a_{k_2} < \ldots \quad \text{και} \quad \text{(iii) } s - \frac{1}{n} < a_{k_n} < s, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Για $n = 1$ επιλέγουμε $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $s - 1 < a_{k_1} < s$.
Για $n = 2$ θέτουμε $x_2 = \max\{s - \frac{1}{2},\ a_1, a_2, \ldots, a_{k_1}\}$. Επιλέγουμε $k_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_2 < a_{k_2} < s$. Από τον ορισμό του x_2 έπεται ότι ισχύει $k_1 < k_2$, $a_{k_1} < a_{k_2}$ και $s - \frac{1}{2} < a_{k_2} < s$.
Επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι τα $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ έχουν επιλεγεί.
Θέτουμε $x_{n+1} = \max\{s - \frac{1}{n+1},\ a_1, a_2, \ldots, a_{k_n}\}$ και επιλέγουμε $k_{n+1} \in \mathbb{N}$ ώστε $x_{n+1} < a_{k_{n+1}} < s$.
Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγική κατασκευή. Από την ιδιότητα $s - \frac{1}{n} < a_{k_n} < s$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι $a_{k_n} \to s$.

3. (2 μον.) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\text{(i)} \ \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)^k, \quad \text{(ii)} \ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \big(\ln(k+1) - \ln k \big), \quad \text{(iii)} \ \sum_{k=1}^{\infty} k \sin\Big(\frac{1}{k^3}\Big), \quad \text{(iv)} \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1).$$

(Υπόδειξη για την (iv): Μπορείτε να συγκρίνετε με την ακολουθία $b_k = 1/k$.)

Απάντηση. (i) Έστω $a_k = (\sqrt[k]{k} - 1)^k$. Είναι $a_k > 0$ άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο της ρίζας. Είναι $\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{k} - 1 \to 0$ και $0 < 1$. Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.
(ii) Είναι σειρά με εναλλασσόμενα πρόσημα. Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του κριτηρίου του Leibniz. Θέτουμε $b_k = \ln(k+1) - \ln k$, $k = 1, 2, \ldots$. Η (b_k) είναι ακολουθία θετικών όρων η οποία φθίνει προς το 0. Πράγματι: Είναι $b_{k+1} = \ln(1 + \frac{1}{k+1}) < \ln(1 + \frac{1}{k}) = b_k$ και $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \ln(1 + \frac{1}{k}) = 0$.

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του Leibniz βλέπουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k$ συγκλίνει.

(iii) Έστω $a_k = k \sin(\frac{1}{k^3})$. Οι όροι είναι θετικοί και μπορούμε να εφαρμόσουμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης. Συγκρίνουμε με την $b_k = \frac{1}{k^2}$. Είναι

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{k^3})}{\frac{1}{k^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Αφού $0 < 1 < +\infty$, συμπεραίνουμε ότι η (a_k) έχει την ίδια συμπεριφορά με την (b_k) και αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, παίρνουμε ότι και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(iv) Θα δείξουμε ότι, για κάθε $k \geqslant 3$, ισχύει $\sqrt[k]{k} - 1 > \frac{1}{k}$. Θέτουμε $\theta_k = \sqrt[k]{k} - 1$. Για $k \geqslant 2$ είναι $\theta_k > 0$. Έχουμε $\sqrt[k]{k} = 1 + \theta_k$ και υψώνοντας στην k παίρνουμε $k = (1 + \theta_k)^k$. Αφού η ακολουθία $\left((1 + \frac{1}{k})^k\right)$ αυξάνει προς το e, είναι $(1 + \frac{1}{k})^k < e$ και, αφού $e < 3$, για κάθε $k \geqslant 3$, παίρνουμε:

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < 3 \leqslant k = (1 + \theta_k)^k$$

Έπεται ότι, για κάθε $k \geqslant 3$, είναι $\theta_k > \frac{1}{k}$. Αφού η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης έπεται ότι αποκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k$.

4. (2 μον.) (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και συνάρτηση $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και έχει την ιδιότητα ότι το $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}\sin(x^3)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απάντηση. (α) Έστω $\ell = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση, υπάρχει $M = M(\varepsilon) > a$ ώστε αν $x \geqslant M$ τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon/3$. Επίσης, η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, M]$, οπότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, M]$. Άρα, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, ώστε αν $x, y \in [a, M]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$.

Θα δείξουμε ότι αν $x, y \in [a, +\infty)$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $x, y \in [M, +\infty)$: τότε, $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
2. $x, y \in [a, M]$: τότε, από την επιλογή του δ έχουμε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
3. $a \leqslant x < M < y$: τότε, $x, M \in [a, M]$ και $|x - M| < |x - y| < \delta$, άρα $|f(x) - f(M)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Επίσης, $M, y \geqslant M$ άρα $|f(M) - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$ και $|f(y) - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - f(M)| + |f(M) - f(y)| \\ &\leqslant |f(x) - f(M)| + |f(M) - \ell| + |\ell - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και έχει την ιδιότητα $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, αφού $|f(x)| = |\frac{1}{x}\sin(x^3)| \leqslant |\frac{1}{x}|$. Από το (α) συμπεραίνουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

5. (2 μον.) (α) Δίνονται διάστημα $[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$ και η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [a, b]$ με $x \neq x_0$ και $f(x_0) = 2$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του Darboux για το ολοκλήρωμα Riemann, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και βρείτε το ολοκλήρωμά της.

(β) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: Για κάθε διάστημα $[c, d] \subseteq [a, b]$, ισχύει $\int_c^d g(x)dx = 0$. Δείξτε ότι $g(x) = 0$, για κάθε $x \in [a, b]$.

Απάντηση. (α) Κατ' αρχάς είναι φανερό ότι, αφού κάθε υποδιάστημα του $[a, b]$ περιέχει σημεία διαφορετικά του x_0 (στα οποία η f παίρνει την τιμή 0), για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ θα ισχύει $L(f, P) = 0$.

Κατά συνέπεια, $\underline{\int_a^b} f(x)dx = 0$. Αν δείξουμε ότι και $\overline{\int_a^b} f(x)dx = 0$, τότε θα έχουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε διαμέριση $P_0 = P_0(\varepsilon)$ του $[a, b]$, με την ιδιότητα $U(f, P_0) < \varepsilon$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\varepsilon < \min\{6(x_0 - a),\ 6(b - x_0)\}$. Θεωρούμε τη διαμέριση:

$$P_0 = \{a,\ x_0 - \frac{\varepsilon}{6},\ x_0 + \frac{\varepsilon}{6},\ b\}.$$

Είναι

$$U(f, P_0) = 0 \cdot (x_0 - \frac{\varepsilon}{6} - a) + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + 0 \cdot (b - x_0 - \frac{\varepsilon}{6}) = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant U(f, P_0) < \varepsilon$$

και, αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε $\overline{\int_a^b} f(x)dx = 0$. Έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b f(x)dx = 0$.

(β) Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ με $g(x_0) \neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $g(x_0) > 0$. Αφού η g είναι συνεχής, θα είναι και $g(x) > 0$ κοντά στο x_0, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0 \in (a, b)$. Από τον ορισμό της συνέχειας παίρνουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ με $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b]$ τέτοιο ώστε: Για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ισχύει $g(x) \geqslant g(x_0)/2$. Από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος έπεται ότι

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g(x)dx \geqslant 2\delta \cdot \frac{g(x_0)}{2} > 0$$

Άτοπο, αφού σύμφωνα με την υπόθεσή μας θα έπρεπε να ισχύει $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g(x)dx = 0$.

Όμοια θα καταλήγαμε σε άτοπο αν υποθέταμε ότι $g(x_0) < 0$. Συμπεραίνουμε ότι $g(x) = 0$, για κάθε $x \in [a, b]$.

Παρατήρηση. Χρησιμοποιώντας το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού θα μπορούσαμε να δώσουμε την ακόλουθη συντομότερη απόδειξη:
Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = \int_a^x g(t)dt\ ,\quad x \in [a, b]$. Σύμφωνα με το πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα, αφού η g είναι συνεχής, η G είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $G'(x) = g(x)$, για κάθε $x \in [a, b]$. Όμως, από την υπόθεση, η G είναι η σταθερή συνάρτηση 0, άρα και η $g = G'$ είναι η μηδενική συνάρτηση.

6. (2 μον.) (α) Δίνονται $A \subseteq \mathbb{R}$ και συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: Υπάρχουν σταθερές $n \in \mathbb{N}$ και $K > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε $x, y \in A$, να ισχύει: $|f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x - y|^{1/n}$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Αφού αποδείξετε την ανισότητα $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x - y|}$, χρησιμοποιήστε το προηγούμενο ερώτημα για να συμπεράνετε ότι η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Είναι η συνάρτηση του ερωτήματος (β) Lipschitz συνεχής; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = (\frac{\varepsilon}{K})^n$. Έχουμε: Αν $x,\ y \in A$ με $|x - y| < \delta$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|^{1/n} < K\delta^{1/n} = K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Αφού τα δύο μέλη της ζητούμενης ανισότητας είναι μη αρνητικά, μπορούμε να τα υψώσουμε στο τετράγωνο. Επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y \leqslant x$. Έτσι η ζητούμενη ανισότητα γίνεται:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leqslant x - y$$

Μετά από πράξεις, περνάμε στην ισοδύναμη ανισότητα $y \leqslant \sqrt{x}\sqrt{y}$, η οποία ισχύει, αφού $y \leqslant x$.

Συμπεραίνουμε ότι ισχύει $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant |x - y|^{1/2}$, για κάθε $x, y \in [0, +\infty)$, δηλαδή η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$ ικανοποιεί την υπόθεση του ερωτήματος (α) με $n = 2$ και $K = 1$. Σύμφωνα με το (α), έπεται ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Θα δείξουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι Lipschitz συνεχής: Υποθέτουμε ότι είναι, δηλαδή ότι υπάρχει σταθερά $L > 0$ τέτοια ώστε $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant L|x - y|$, για κάθε $x, y \in [0, +\infty)$. Ειδικότερα, θα ισχύει $|\sqrt{x} - 0| \leqslant L|x - 0|$, δηλαδή $\sqrt{x} \leqslant Lx$, για κάθε $x > 0$. Έπεται ότι $\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant L$, για κάθε $x > 0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Συυμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι Lipschitz συνεχής.