Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Ενδιάμεση Εξέταση - 14 Δεκεμβρίου 2019

1. (2 μον.) (α) Δίνεται ακολουθία (a_n). Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες $(a_{2k}), (a_{2k-1})$ και (a_{5k}) συγκλίνουν. Δείξτε ότι:

(i) $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} a_{5k}$.

(ii) Η ακολουθία (a_n) συγκλίνει.

(β) Εξετάστε αν είναι αληθής ή ψευδής η παρακάτω πρόταση, αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας:
«Αν για μια ακολουθία (x_n) ισχύει $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$, τότε η (x_n) συγκλίνει.»

2. (2 μον.) Δίνεται φραγμένη ακολουθία (a_n) και έστω $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(α) Δείξτε ότι ισχύει $\limsup a_n \leqslant s$.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) για την οποία ισχύει $\limsup a_n < s$.

(γ) Δείξτε ότι, αν ισχύει $a_n \neq s$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\limsup a_n = s$.

3. (2 μον.) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{k} - 1)^k, \quad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\big(\ln(k+1) - \ln k\big), \quad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} k \sin\Big(\frac{1}{k^3}\Big), \quad \text{(iv)} \sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{k} - 1).$$

(Υπόδειξη για την (iv): Μπορείτε να συγκρίνετε με την ακολουθία $b_k = 1/k$.)

4. (2 μον.) (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και συνάρτηση $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και έχει την ιδιότητα ότι το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(β) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}\sin(x^3)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

5. (2 μον.) (α) Δίνονται διάστημα $[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$ και η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [a, b]$ με $x \neq x_0$ και $f(x_0) = 2$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του Darboux για το ολοκλήρωμα Riemann, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και βρείτε το ολοκλήρωμά της.
(β) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: Για κάθε διάστημα $[c, d] \subseteq [a, b]$, ισχύει $\int_c^d g(x)dx = 0$. Δείξτε ότι $g(x) = 0$, για κάθε $x \in [a, b]$.

6. (2 μον.) (α) Δίνονται $A \subseteq \mathbb{R}$ και συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: Υπάρχουν σταθερές $n \in \mathbb{N}$ και $K > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε $x, y \in A$, να ισχύει: $|f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x - y|^{1/n}$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(β) Αφού αποδείξετε την ανισότητα $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x - y|}$, χρησιμοποιήστε το προηγούμενο ερώτημα για να συμπεράνετε ότι η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(γ) Είναι η συνάρτηση του ερωτήματος (β) Lipschitz συνεχής; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Καλή Επιτυχία!