Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 15/6/2015

1. (2 μονάδες) (α) Έστω (α_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω K το σύνολο των οριακών σημείων (σημείων συσσώρευσης) της (α_n). Αποδείξτε ότι: αν $x_n \in K$ $(n \in \mathbb{N})$ και $x_n \to x$, τότε $x \in K$.

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας):

(i) Αν η $(\beta_n)_n$ είναι βασική ακολουθία, τότε η $(|\beta_n|)_n$ είναι βασική ακολουθία.

(ii) Η $(\gamma_n)_n$ είναι βασική ακολουθία αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|\gamma_n - \gamma_{n_0}| < \varepsilon$.

2. (2.5 μονάδες) (α) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{k}-1)^k \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(\text{ημ}\, k)^2}.$$

(β) (Θεωρία) Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε **πλήρως** ότι: αν $x_n, y_n \in (a,b)$ και $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ τότε οι ακολουθίες $(f(x_n))$ και $(f(y_n))$ συγκλίνουν, και μάλιστα στον ίδιο πραγματικό αριθμό.

3. (1.5 μονάδες) Έστω (α_k) ακολουθία **θετικών** πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν $\alpha_k \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ συγκλίνει.

(β) Αν $k^2\alpha_k \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ συγκλίνει.

(γ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k)^2$ συγκλίνει.

4. (2 μονάδες) (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν διαμερίσεις P_1 και P_2 του $[a,b]$ ώστε $U(f,P_1) = L(f,P_2)$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ και έστω ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (f(x))^2 dx.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

5. (2 μονάδες) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{1}{e^{2x}+e^x}\,dx, \qquad \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx, \qquad \int \text{τοξεφ}(x)\,dx.$$

6. (2 μονάδες) (α) Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor $T_{n,F,0}(x)$.

(β) Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\left(\int_a^b g(x)\text{ημ}(x)dx\right)^2 + \left(\int_a^b g(x)\text{συν}(x)dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b (g(x))^2 dx.$$

Καλή Επιτυχία!