

Απειροστικός Λογισμός II

28 Σεπτεμβρίου 2012

1. (2 μον.) (α) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n \rightarrow 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{k_n}| < +\infty$.

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

1. $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

2. $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ αν $0 < x \leq \pi$ και $g(0) = 0$.

2. (2 μον.) (α) Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3$ συγκλίνει.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $a_n = f(1/n)$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Δείξτε ότι:

1. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $f(0) = 0$.

2. Αν υπάρχει η $f'(0)$ και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $f'(0) = 0$. [Υπόδειξη: παρατηρήστε ότι $f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} na_n$.]

3. (2 μον.) (α) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{2^k}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^4}.$$

(β) Εξετάστε για ποιές τιμές του $a > 0$ συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k^a}$.

4. (2 μον.) (α) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε την συνάρτηση $S : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $S(x) = \int_0^x f(t) dt$. Δείξτε ότι: αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in [0, 1]$ τότε η S είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

(β) Δώστε παράδειγμα φραγμένης Riemann ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $S : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $S(x) = \int_0^x f(t) dt$ να μην είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1/2$.

5. (2 μον.) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx, \quad \int x \cos^2 x dx, \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

6. (2 μον.) (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f(2) = 5$ και

$$f(x) = \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x-2}, \quad x \in [-10, 10] \setminus \{0, 2\}$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(1) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx = - \int_0^1 2xf(x)f'(x) dx$$

και χρησιμοποιώντας αυτήν την ισότητα δείξτε ότι

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx \leq 2 \sqrt{\int_0^1 x^2 (f(x))^2 dx} \sqrt{\int_0^1 (f'(x))^2 dx}.$$

Καλή Επιτυχία!