ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ (2005-06)

9 Οκτωβρίου 2006

1. (2μ) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(β) Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(γ) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

2. (1.5μ) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

3. (1.5μ) (α) Έστω (a_k) μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι $\lim_{k\to\infty} a_k > 1$. Δείξτε ότι:

$$\text{η σειρά } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{a_k}} \text{ συγκλίνει.}$$

(β) Δείξτε ότι η σειρά $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots$ αποκλίνει.

4. (1.5μ) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann, αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $0<x\leq 1$ και $f(0)=2$ είναι ολοκληρώσιμη.

5. (1μ) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $\delta>0$ ορίζουμε $h_\delta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$h_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,dt.$$

Δείξτε ότι $\lim_{\delta\to0^+} h_\delta(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

6. (2μ) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int \text{συν}^2 x\,\text{ημ}^3 x\,dx \qquad \int e^x\,\text{ημ}(e^x)\,dx \qquad \int \sqrt{x}\,\log x\,dx.$$

7. (1μ) Βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} e^t\text{ημ}t\,dt.$$

8. (1.5μ) Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2}\int_a^b\left[\int_a^b (f(y)-f(x))(g(y)-g(x))\,dy\right]dx$$
$$=(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx-\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

Αν οι f και g είναι αύξουσες, χρησιμοποιώντας το παραπάνω δείξτε ότι

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\leq (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Σημειώστε τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό). Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!