ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ (2005-06)

Περίοδος Ιουνίου: 5 Σεπτεμβρίου 2006

1. (2μ) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x$ αν $x>0$ και $f(x)=2x$ αν $x\leq 0$, είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(β) Αν η ακολουθία $s_n=a_1+\cdots+a_n$ είναι φραγμένη, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει.

(γ) Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $c\in[a,b]$ ώστε $f(c)(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx$.

2. (1.5μ) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^4}{2^k}\qquad \text{και}\qquad \sum_{k=1}^{\infty}k\,\text{ημ}\Big(\frac{1}{k^3}\Big).$$

3. (1.5μ) (α) Δείξτε ότι η εναλλάσσουσα σειρά $1-\frac{1}{2}+\frac{2}{4}-\frac{1}{5}+\frac{2}{6}-\frac{1}{7}+\cdots$ αποκλίνει. Ποιά από τις υποθέσεις του κριτηρίου Leibniz δεν ικανοποιείται;

(β) Δίνονται δύο ακολουθίες $\{a_k\}$ και $\{b_k\}$ με θετικούς όρους. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\theta$ και $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{b_{k+1}}{b_k}=\omega$, όπου $0<\theta<1$, $\omega>1$ και $\theta\omega<1$. Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ αποκλίνει ενώ η $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ συγκλίνει.

4. (1.5μ) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[r,q]$, $r,q\in\mathbb{Q}$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$.

5. (1μ) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M>0$ ώστε $|f'(x)|\leq M$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

6. (2μ) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int \log x\,dx\qquad \int \text{εφ}\,x\,dx,\qquad \int\frac{dx}{e^{2x}+e^x}.$$

7. (1.5μ) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+\sqrt{x}}\frac{t}{1+t^2}\,dt.$$

8. (1.5μ) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $f(a)=f(b)=0$. Υποθέτουμε ότι η f' είναι συνεχής και ότι $\int_a^b[f(x)]^2dx=1$. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες δείξτε ότι

$$\int_a^b xf(x)f'(x)\,dx=-\frac{1}{2},$$

και, χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\left(\int_a^b x^2[f(x)]^2\,dx\right)\left(\int_a^b[f'(x)]^2dx\right)\geq\frac{1}{4}.$$

---

(1) Σημειώστε τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό).

(2) Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!