

Απειροστικός Λογισμός II

Εξετάσεις 24 Σεπτεμβρίου 2002

1. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $f(1) = f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in (0, 1)$ ώστε $f'''(x) = 0$.

2. Αν μια κυρτή συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (όπου I διάστημα του \mathbb{R}) έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $c \in I$, να αποδειχθεί ότι το c είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f .

3. Έστω $a_n \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ και $0 < a < 1$. Αν $\sqrt[n]{|a_n|} \leq a$ για κάθε $n \geq n_0$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως και ότι $\left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \right| \leq \frac{a^{n_0+1}}{1-a}$.

4. (α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Να διατυπώσετε πλήρως όποιο κριτήριο χρησιμοποιήσετε.

(β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$.

5. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+5} dx \quad \text{και} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

6. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη, και f συνεχής στο $[a, b] \setminus \{\xi\}$ (όπου $a \leq \xi \leq b$). Αποδείξτε ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$.

7. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 5, & x = 0 \end{cases}$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-2, 2]$ και να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^2 f(x) dx$.

8. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Αποδείξτε ότι η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

9. Αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \log 2$.

10. Αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{x^2+n^2} dx = 0$.

11. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$ είναι σταθερή [και μάλιστα ίση με $\pi/2$].

Να γραφούν 9 θέματα.

Σημειώστε στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό). Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!