Κυρτή Ανάλυση
Εαρινό Εξάμηνο 2019–2020
Φυλλάδιο 4

1. Έστω K μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι αν

$$\|p_K(x) - p_K(y)\|_2 = \|x - y\|_2 \tag{1}$$

για κάποια $x, y \in \mathbb{R}^d$, τότε $x - p_K(x) = y - p_K(y)$. Αν η (1) ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$, τι συμπεραίνει κανείς για το K;

Λύση. Μία από τις ιδιότητες της μετρικής προβολής που αποδείχθηκε στο μάθημα είναι η

$$\|p_K(x) - p_K(y)\|_2^2 + \|[x - p_K(x)] - [y - p_K(y)]\|_2^2 \leqslant \|x - y\|_2^2,$$

για αυθαίρετα $x, y \in \mathbb{R}^d$. Αν για κάποια $x, y \in \mathbb{R}^d$ ισχύει η (1), τότε πρέπει

$$\|[x - p_K(x)] - [y - p_K(y)]\|_2^2 = 0$$

και άρα $x - p_K(x) = y - p_K(y)$.

Αν τώρα η (1) ισχύει για κάθε ζευγάρι $x, y \in \mathbb{R}^d$, τότε επιλέγοντας $x \in K$, που υπάρχει γιατί $K \neq \varnothing$, συμπεραίνει κανείς ότι $y - p_K(y) = x - p_K(x) = 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^d$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $y \in K$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^d$, και άρα πρέπει $K = \mathbb{R}^d$. □

2. (α) Περιγράψτε όλα τα κλειστά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ που το συμπλήρωμά τους είναι επίσης κυρτό.
(β) Περιγράψτε όλα τα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ που δεν έχουν κανένα υπερεπίπεδο στήριξης.

Λύση. (α) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και τέτοιο ώστε το συμπλήρωμά του K^c είναι επίσης κυρτό. Έστω ότι $K \neq \varnothing$ και $K \neq \mathbb{R}^d$. Αν $\mathrm{aff}(K) \neq \mathbb{R}^d$, τότε το K^c δεν είναι κυρτό: το K περιέχεται σε ένα υπερεπίπεδο $H(u, c) := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u\rangle = c\}$, ας πούμε, $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$, και αν $x \in K$ και $y \in \mathbb{R}^d$ είναι τέτοιο ώστε $\langle y, u\rangle < c$, ας πούμε, τότε $y \in K^c$,

$$\langle 2x - y, u\rangle = 2\langle x, u\rangle - \langle y, u\rangle = 2c - \langle y, u\rangle > 2c - c = c,$$

και άρα $2x - y \in K^c$ επίσης, ενώ $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(2x - y) \notin K^c$. Άρα $\mathrm{aff}(K) = \mathbb{R}^d$ και το K πρέπει να έχει διάσταση d. Όμοια $\mathrm{aff}(K^c) = \mathbb{R}^d$, γιατί αλλιώς το $K = (K^c)^c$ δεν θα ήταν κυρτό.

Αφού τα K και K^c έχουν ξένα εσωτερικά (που είναι και μη κενά αφού τα K, K^c είναι κυρτά και διάστασης d), διαχωρίζονται γνήσια: υπάρχουν $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ και $b \in \mathbb{R}$ ώστε

$$K \subseteq H^-(v, b) = \{x \in \mathbb{R}^d : x\langle v, x\rangle \leqslant b\} \quad \text{και} \quad K^c \subseteq H^+(v, b) = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x\rangle \geqslant b\}.$$

Όμως τότε

$$K \supseteq [H^+(v, b)]^c = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x\rangle < b\},$$

και αφού το K είναι κλειστό πρέπει τελικά

$$H^-(v, b) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x\rangle < b\}} \subseteq K.$$

Επομένως πρέπει $K = H^{-}(v, b)$. Άρα τα μόνα κλειστά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με κυρτό συμπλήρωμα είναι τα $\varnothing$, $\mathbb{R}^d$ και οι κλειστοί ημίχωροι του $\mathbb{R}^d$.
(β) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$, $K \neq \varnothing$, κυρτό σύνολο. Αν $\mathrm{rb}(K) \neq \varnothing$, τότε το K έχει υπερεπίπεδο στήριξης σε κάθε $x \in \mathrm{rb}(K)$. Άρα αν το K δεν έχει κανένα υπερεπίπεδο στήριξης, τότε πρέπει $\mathrm{rb}(K) = \varnothing$. Άρα πρέπει $K = \mathrm{aff}(K)$. Δηλαδή, πέραν του κενού συνόλου, οι αφφινικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^d$ είναι τα μόνα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ χωρίς κανένα υπερεπίπεδο στήριξης. (Υπενθυμίζεται ότι ο ορισμός που δόθηκε για υπερεπίπεδο στήριξης ενός K σε ένα σημείο $x \in \mathrm{rb}(K)$ ήταν ένα υπερεπίπεδο $H(u, c) = \{y \in \mathbb{R}^d \colon \langle u, y\rangle = c\}$, $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $x \in H(u, c)$, $K \subseteq H^{-}(u, c) = \{y \in \mathbb{R}^d \colon \langle y, u\rangle \leqslant c\}$, και $K \nsubseteq H(u, c)$.) □

3. (α) Υπάρχει παράδειγμα ξένων, μη κενών, κυρτών και κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ που δεν διαχωρίζονται γνήσια;
(β) Υπάρχει παράδειγμα ξένων, μη κενών, κυρτών και κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ που διαχωρίζονται γνήσια αλλά όχι αυστηρά;

Λύση. (α) Όχι. Αν K_1, K_2 κυρτά και ξένα, τότε έχουν ξένα σχετικά εσωτερικά και άρα διαχωρίζονται γνήσια.
(β) Έστω $K_1 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = 0\right\}$ και $K_2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ y \geqslant 1/x\right\}$. Τα K_1 και K_2 είναι κλειστά, κυρτά, ξένα, διαχωρίζονται γνήσια, αλλά δεν διαχωρίζονται αυστηρά. Πράγματι, αν $(x_n, y_n) \to (x, y) \in \mathbb{R}^2$, τότε πρέπει $x_n \to x$ και $y_n \to y$· αν $(x_n, y_n) \in K_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε πρέπει $y_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και άρα και $y = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$, δηλαδή $(x, y) \in K_1$· και αν $x_n > 0$ και $y_n \geqslant x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή αν $(x_n, y_n) \in K_2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε πρέπει $x = \lim_{n\to\infty} x_n \geqslant 0$ και $y = \lim_{n\to\infty} y_n \geqslant \lim_{n\to\infty} x_n^{-1} = x^{-1}$, και από την τελευταία πρέπει τελικά και $x \neq 0$ και άρα $(x, y) \in K_2$.

Τα K_1 και K_2 διαχωρίζονται γνήσια από το υπερεπίπεδο $H := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = 0\right\} (= K_1)$· πράγματι $H = H((u, v), 0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon ux + vy = 0\right\}$ με $(u, v) = (0, 1)$, και $K_2 \subset H^{+}((u, v), 0)$ και $K_2 \nsubseteq H$ αφού $ux + vy = y > 0\ \forall\, (x, y) \in K_2$.

Αν τα K_1, K_2 διαχωρίζονταν αυστηρά, θα υπήρχαν $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $c \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε

$$ux + vy \leqslant c - \varepsilon \qquad \text{για κάθε } (x, y) \text{ με } y = 0, \tag{2}$$

και

$$ux + vy > c + \varepsilon \qquad \text{για κάθε } (x, y) \text{ με } x > 0 \text{ και } y \geqslant 1/x; \tag{3}$$

από την (2) πρέπει $u = 0$ και $c - \varepsilon \geqslant 0$, γιατί αν $u > 0$ τότε $ux \to +\infty$ καθώς $x \to +\infty$ και αν $u < 0$ τότε $ux \to +\infty$ καθώς $u \to -\infty$, και από την (3) πρέπει μετά $vy > c + \varepsilon > 2\varepsilon$ για κάθε $x > 0$ και $y \geqslant 1/x$, και αυτό δεν γίνεται γιατί για $y = 1/x$, καθώς $x \to +\infty$ έχει κανείς ότι $vy \to 0$.

Τέλος τα K_1 και K_2 είναι κυρτά. Πράγματι, αν $(x_1, 0), (x_2, 0) \in K_1$ και $\lambda \in [0, 1]$, τότε

$$\lambda(x_1, 0) + (1 - \lambda)(x_2, 0) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, 0) \in K_1\cdot$$

και αν $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K_2$ και $\lambda \in [0, 1]$, τότε

$$\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2),$$

και $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 > 0$, αφού $x_1, x_2 > 0$ και $\lambda, 1-\lambda \geqslant 0$ και όχι ταυτόχρονα και τα δύο μηδέν, και

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \geqslant \frac{\lambda}{x_1} + \frac{1-\lambda}{x_2} = \frac{\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1}{x_1 x_2} \geqslant \frac{1}{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2},$$

η δεύτερη ανισότητα επειδή

$$\begin{aligned}
[\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1][\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] &= \lambda(1-\lambda)(x_1^2 + x_2^2) + [\lambda^2 + (1-\lambda)^2]x_1x_2 \\
&\geqslant 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 + [\lambda^2 + (1-\lambda)^2]x_1x_2 \\
&= [\lambda + (1-\lambda)]^2 x_1x_2 \\
&= x_1x_2,
\end{aligned}$$

και άρα

$$\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \in K_2.$$

□

4. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό, κλειστό και κυρτό, και έστω $f\colon \mathbb{R}^d \to [0, +\infty)$ η συνάρτηση $f(x) := \mathrm{dist}(x, K)$, όπου $\mathrm{dist}(x, K) := \inf\left\{\left\|x - y\right\|_2 : y \in K\right\}$.

(α) Δείξτε ότι

$$\nabla f(x) = \frac{x - p_K(x)}{\left\|x - p_K(x)\right\|_2} \qquad \text{για } x \in \mathbb{R}^d \setminus K.$$

(β) Δείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^d \setminus K$.

Λύση. (α) Εξ' ορισμού,

$$f(x) = \left\|x - p_K(x)\right\|_2 \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Έστω $e_1, \ldots, e_d$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^d$· τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\left\|x + te_i - p_K(x + te_i)\right\|_2 - \left\|x - p_K(x)\right\|_2}{t},$$

εφόσον το όριο υπάρχει. Επειδή $p_K(x) \in K$, έχει κανείς ότι

$$\left\|x + te_i - p_K(x + te_i)\right\|_2 = \inf_{y\in K} \left\|x + te_i - y\right\|_2 \leqslant \left\|x + te_i - p_K(x)\right\|_2,$$

και επομένως ότι

$$\begin{aligned}
\left\|x + te_i - p_K(x + te_i)\right\|_2 - \left\|x - p_K(x)\right\|_2 &\leqslant \left\|x + te_i - p_K(x)\right\|_2 - \left\|x - p_K(x)\right\|_2 \\
&= \frac{\left\|x + te_i - p_K(x)\right\|_2^2 - \left\|x - p_K(x)\right\|_2^2}{\left\|x + te_i - p_K(x)\right\|_2 + \left\|x - p_K(x)\right\|_2} \\
&= \frac{\left\|x - p_K(x) + te_i\right\|_2^2 - \left\|x - p_K(x)\right\|_2^2}{\left\|x + te_i - p_K(x)\right\|_2 + \left\|x - p_K(x)\right\|_2} \\
&= \frac{\left\|x - p_K(x)\right\|_2^2 + \|te_i\|_2^2 + 2\left\langle x - p_K(x), te_i\right\rangle - \left\|x - p_K(x)\right\|_2^2}{\left\|x + te_i - p_K(x)\right\|_2 + \left\|x - p_K(x)\right\|_2} \\
&= \frac{t^2 + 2t\left\langle x - p_K(x), e_i\right\rangle}{\left\|x + te_i - p_K(x)\right\|_2 + \left\|x - p_K(x)\right\|_2},
\end{aligned}$$

αν επιπλέον $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$ (οπότε $x \neq p_K(x)$). Από την άλλη, από την ανισότητα Cauchy–Schwarz, και για $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$ πάλι, παίρνει κανείς ότι

$$\begin{aligned}
&\left\|x + te_i - p_K(x + te_i)\right\|_2 - \left\|x - p_K(x)\right\|_2 \\
&\qquad = \frac{\left\|x + te_i - p_K(x + te_i)\right\|_2 \left\|x - p_K(x)\right\|_2 - \left\|x - p_K(x)\right\|_2^2}{\left\|x - p_K(x)\right\|_2} \\
&\qquad \geqslant \frac{\langle x + te_i - p_K(x + te_i), x - p_K(x)\rangle - \left\|x - p_K(x)\right\|_2^2}{\left\|x - p_K(x)\right\|_2} \\
&\qquad = \frac{t\,\langle e_i, x - p_K(x)\rangle + \langle x - p_K(x + te_i), x - p_K(x)\rangle - \left\|x - p_K(x)\right\|_2^2}{\left\|x - p_K(x)\right\|_2} \\
&\qquad = \frac{t\,\langle e_i, x - p_K(x)\rangle + \langle x - p_K(x + te_i), x - p_K(x)\rangle - \langle x - p_K(x), x - p_K(x)\rangle}{\left\|x - p_K(x)\right\|_2} \\
&\qquad = \frac{t\,\langle e_i, x - p_K(x)\rangle + \langle x - p_K(x + te_i) - [x - p_K(x)], x - p_K(x)\rangle}{\left\|x - p_K(x)\right\|_2} \\
&\qquad = \frac{t\,\langle e_i, x - p_K(x)\rangle + \langle p_K(x) - p_K(x + te_i), x - p_K(x)\rangle}{\left\|x - p_K(x)\right\|_2} \\
&\qquad \geqslant \frac{t\,\langle e_i, x - p_K(x)\rangle}{\left\|x - p_K(x)\right\|_2},
\end{aligned}$$

η τελευταία ανισότητα από την βασική ιδιότητα $\langle z - p_K(z), w - p_K(z)\rangle \leqslant 0$ για κάθε $z \in \mathbb{R}^d$ και $w \in K$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω δύο ανισότητες παίρνει κανείς ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\langle e_i, x - p_K(x)\rangle}{\left\|x - p_K(x)\right\|_2} &\leqslant \frac{\left\|x + te_i - p_K(x + te_i)\right\|_2 - \left\|x - p_K(x)\right\|_2}{t} \\
&\leqslant \frac{t + 2\,\langle x - p_K(x), e_i\rangle}{\left\|x + te_i - p_K(x)\right\|_2 + \left\|x - p_K(x)\right\|_2}
\end{aligned}$$

για $t > 0$, και

$$\begin{aligned}
\frac{\langle e_i, x - p_K(x)\rangle}{\left\|x - p_K(x)\right\|_2} &\geqslant \frac{\left\|x + te_i - p_K(x + te_i)\right\|_2 - \left\|x - p_K(x)\right\|_2}{t} \\
&\geqslant \frac{t + 2\,\langle x - p_K(x), e_i\rangle}{\left\|x + te_i - p_K(x)\right\|_2 + \left\|x - p_K(x)\right\|_2}
\end{aligned}$$

για $t < 0$. Επειδή τώρα

$$\lim_{t \to 0} \frac{t + 2\,\langle x - p_K(x), e_i\rangle}{\left\|x + te_i - p_K(x)\right\|_2 + \left\|x - p_K(x)\right\|_2} = \frac{\langle x - p_K(x), e_i\rangle}{\left\|x - p_K(x)\right\|_2},$$

έπεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\langle x - p_K(x), e_i\rangle}{\|x - p_K(x)\|_2} - \varepsilon \leqslant \frac{t + 2\langle x - p_K(x), e_i\rangle}{\|x + te_i - p_K(x)\|_2 + \|x - p_K(x)\|_2} \leqslant \frac{\langle x - p_K(x), e_i\rangle}{\|x - p_K(x)\|_2} + \varepsilon$$

για $t \in (-\delta, \delta)$ και άρα τελικά ότι

$$\frac{\langle x - p_K(x), e_i\rangle}{\|x - p_K(x)\|_2} - \varepsilon \leqslant \frac{\|x + te_i - p_K(x + te_i)\|_2 - \|x - p_K(x)\|_2}{t} \leqslant \frac{\langle x - p_K(x), e_i\rangle}{\|x - p_K(x)\|_2} + \varepsilon$$

για $t \in (-\delta, \delta)$. Έπεται ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\|x + te_i - p_K(x + te_i)\|_2 - \|x - p_K(x)\|_2}{t} = \frac{\langle x - p_K(x), e_i\rangle}{\|x - p_K(x)\|_2}.$$

Τέλος, $\langle x - p_K(x), e_i\rangle$ είναι η i-συντεταγμένη του $x - p_K(x)$, οπότε

$$\nabla f(x) = \frac{x - p_K(x)}{\|x - p_K(x)\|_2}.$$

(β) Από το (α)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\langle x - p_K(x), e_i\rangle}{\|x - p_K(x)\|_2} \qquad i \in \{1, \dots, d\},\ x \in \mathbb{R}^d \setminus K.$$

Επειδή η απεικόνιση $x \mapsto x - p_K(x)$ είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^d$, και οι συναρτήσεις νόρμα ($y \mapsto \|y\|_2$) και εσωτερικό γινόμενο ($y \mapsto \langle y, e_i\rangle$)είναι επίσης συνεχείς (ανισότητα Cauchy–Schwarz), οι συναρτήσεις $x \mapsto \langle x - p_k(x), e_i\rangle$ και $x \mapsto \|x - p_K(x)\|_2$ είναι συνεχείς, και άρα και το πηλίκο $x \mapsto \langle x - P_k(x), e_i\rangle / \|x - p_K(x)\|_2$ είναι συνεχής συνάρτηση στο σύνολο $\mathbb{R}^d \setminus K$ που ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται. Επομένως οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^d \setminus K$ και άρα η f είναι (συνεχώς) διαφορίσιμη. □

5. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό κυρτό σύνολο. Δείξτε ότι $\mathrm{ext}(K) \subseteq \mathrm{rb}(K)$, όπου, υπενθυμίζεται ότι, $\mathrm{rb}(K) = \overline{K} \setminus \mathrm{ri}(K)$ είναι το σχετικό σύνορο του K.

Λύση. Έστω $x \in \mathrm{ext}(K)$. Αν $x \in \mathrm{ri}(K)$, τότε υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η ανοικτή σφαίρα $U_2(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\|_2 < r\}$ να ικανοποιεί την $U_2(x, r) \cap \mathrm{aff}(K) \subseteq K$. Αν $y \in U_2(x, r) \cap \mathrm{aff}(K)$, και άρα $y \in K$, τότε και $2x - y \in U_2(x, r) \cap \mathrm{aff}(K)$, αφού $\|(2x - y) - x\|_2 = \|x - y\|_2 < r$, και επομένως $2x - y \in U_2(x, r)$, και $2x - y \in \mathrm{aff}(K)$, αφου το $2x - y$ είναι αφφινικός συνδυασμός των σημείων x και y του K ($2, 1 \in \mathbb{R}$ και $2 - 1 = 1$). Τότε όμως $y, 2x - y \in K$ και $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(2x - y)$, δηλαδή $x \notin \mathrm{ext}(K)$, που είναι αντίφαση φυσικά. Άρα $x \notin \mathrm{ri}(K)$, και αφού $x \in \mathrm{ext}(K) \subseteq K$, έπεται ότι $x \in K \setminus \mathrm{ri}(K) = \overline{K} \setminus \mathrm{ri}(K) = \mathrm{rb}(K)$. □

6. Αν $K \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κυρτό και συμπαγές με μη κενό εσωτερικό, τότε το σύνορο του K δεν μπορεί να είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.
[Υπόδειξη: Θεώρημα Minkowski.]

Λύση. Έστω K κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με μη κενό εσωτερικό $\mathrm{int}(K)$. Από το Θεώρημα του Minkowski, $K = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))$. Επίσης, το ∂K είναι κλειστό και άρα συμπαγές, αφού είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς K· αν ήταν και κυρτό, θα έπρεπε από το Θεώρημα του Minkowski και πάλι να ισχύει και ότι $\partial K = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(\partial K))$.

Από την προηγούμενη Άσκηση, $\mathrm{ext}(K) \subseteq \partial K$· αν το ∂K ήταν κυρτό, αυτό θα είχε σαν συνέπεια $\mathrm{ext}(K) \subseteq \mathrm{ext}(\partial K)$. Πράγματι, αν $x \in \mathrm{ext}(K)$ τότε $x \in \partial K$, και αν το x γραφόταν ως $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ για κάποια $y, z \in \partial K$ με $y \neq z$ και $\lambda \in (0,1)$, αν δηλαδή είχαμε $x \notin \mathrm{ext}(\partial K)$, τότε επειδή y, z ανήκουν και στο K, θα είχαμε ότι $x \notin \mathrm{ext}(K)$ επίσης.

Έπεται τώρα από τα παραπάνω ότι

$$K = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K)) \subseteq \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(\partial K)) = \partial K,$$

και άρα $K = \partial K$. Αυτό όμως είναι άτοπο επειδή $\partial K = \overline{K} \setminus \mathrm{int}(K) = K \setminus \mathrm{int}(K)$ και $\mathrm{int}(K) \neq \varnothing$. □

7. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό. Αν $S \subseteq K$ και $\mathrm{conv}(S) = K$, τότε $\mathrm{ext}(K) \subseteq S$. (Δηλαδή, στην περίπτωση που το K είναι και συμπαγές, το $\mathrm{ext}(K)$ είναι το μικρότερο υποσύνολο του K του οποίου η κυρτή θήκη είναι το K).
[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον χαρακτηρισμό $x \in \mathrm{ext}(K)$ ανν $K \setminus \{x\}$ είναι κυρτό, για $x \in K$.]

Λύση. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό, και $S \subseteq K$ τέτοιο ώστε $\mathrm{conv}(S) = K$. Έστω ότι υπάρχει $x \in \mathrm{ext}(K) \setminus S$. Τότε, $K \setminus \{x\}$ εξακολουθεί να είναι κυρτό, αφού $x \in \mathrm{ext}(K)$, και άρα

$$K \setminus \{x\} = \mathrm{conv}(K \setminus \{x\}) \supseteq \mathrm{conv}(S \setminus \{x\}) = \mathrm{conv}(S) = K,$$

το οποίο φυσικά είναι άτοπο. □

8. (Συνέχεια Άσκησης 1 1ου Φυλλαδίου) Αν K κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, $x_1, x_2, \ldots \in K$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots = 1$, και ο άπειρος κυρτός συνδυασμός $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$, τότε $x \in K$.
[Υπόδειξη: Υπερεπίπεδα στήριξης. Θεωρείστε πρώτα την περίπτωση που η αφφινική θήκη $\mathrm{aff}(\{x_1, x_2, \ldots\})$ των x_n, $n \in \mathbb{N}$, έχει διάσταση d.]

Λύση. Μπορούμε καταρχήν να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\lambda_n > 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$· διαφορετικά κρατάμε μόνο τα n με $\lambda_n > 0$, και το x θα εξακολουθεί να είναι κυρτός συνδυασμός των εναπομεινάντων x_n. Αν δε τα n με $\lambda_n > 0$ είναι πεπερασμένα το πλήθος, τότε θα έχουμε τελειώσει γιατί το x θα είναι πεπερασμένος κυρτός συνδυασμός σημείων του K και άρα θα ισχύει ότι $x \in K$. Μπορούμε λοιπόν να θεωρούμε ότι $\lambda_n > 0$ για άπειρα n και ότι έχουμε κρατήσει μόνον αυτά.

Έστω πρώτα ότι $\mathrm{aff}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = \mathbb{R}^d$. Από την Άσκηση 1 του Φυλλαδίου 1 γνωρίζουμε ότι $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in \overline{K}$. Αν ήταν $x \in \partial K$, τότε επειδή

$$\mathrm{aff}(K) \supset \mathrm{aff}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = \mathbb{R}^d,$$

έχει κανείς ότι $x \in \mathrm{rb}(K) = \partial K$, και άρα υπάρχει υπερεπίπεδο στήριξης του K στο x: υπάρχουν δηλαδή $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ και $c \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\langle u, x \rangle = c \qquad \text{και} \qquad \langle u, y \rangle \leqslant c \quad \forall\, y \in K.$$

Συγκεκριμένα, πρέπει $\langle u, x_n\rangle \leqslant c$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, και μάλιστα με γνήσια ανισότητα για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, επειδή υποθέτουμε ότι $\mathrm{aff}(\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}) = \mathbb{R}^d$, και άρα το $\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ δεν μπορεί να περιέχεται στο υπερεπίπεδο $H(u, c) = \{y \in \mathbb{R}^d\colon\ \langle u, y\rangle = c\}$, το οποίο έχει διάσταση $d-1$. Τότε όμως

$$\langle x, u\rangle = \left\langle u, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, x_n\rangle < \sum_{n=1}^{d} \lambda_n c = c,$$

επειδή υποθέτουμε ότι $\lambda_n > 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, και επειδή $\langle u, x_n\rangle \leqslant c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\langle u, x_n\rangle < c$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Αυτό όμως αντίκειται στο ότι $x \in H(u, c)$, δηλαδή ότι $\langle u, x\rangle = c$. Άρα $x \notin \partial K$, και επομένως $x \in \mathrm{int}(K) = \overline{K} \setminus \partial K$.

Στην γενική περίπτωση θεωρούμε το σύνολο $K' := K \cap \mathrm{aff}(\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\})$. Το K' είναι κυρτό, τα x_n, $n \in \mathbb{N}$, ανήκουν στο K' και η αφφινική τους θήκη είναι, εξ' ορισμού, η αφφινική θήκη του K'. Από τα προηγούμενα, με το $\mathrm{aff}(\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\})$ στη θέση του $\mathbb{R}^d$ και το K' στη θέση του K, το x δεν μπορεί να ανήκει στο σχετικό σύνορο του K' μέσα στο $\mathrm{aff}(\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\})$ και άρα πρέπει $x \in K'$. Άρα $x \in K$, αφού $K' \subseteq K$.

Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να θεωρήσει την κυρτή θήκη

$$C := \mathrm{conv}(\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\})$$

των x_n, $n \in \mathbb{N}$, και να εφαρμόσει το επιχείρημα της δεύτερης παραγράφου απευθείας στο C. Επειδή η κυρτή θήκη των x_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει τα x_n, έπεται ότι $C \subseteq K$, και άρα αρκεί να αποδείξει κανείς ότι $x \in C$· δηλαδή αρκεί τελικά να αποδειχθεί το ζητούμενο για $K = C$. Από την Άσκηση 1 του Φυλλαδίου 1 έχει κανείς ότι $x \in \overline{C}$. Έστω, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $x \in \overline{C} \setminus C$. Τότε, επειδή $\mathrm{ri}(C) \subseteq C$, πρέπει $x \in \overline{C} \setminus \mathrm{ri}(C) = \mathrm{rb}(C)$, και άρα το C έχει υπερεπίπεδο στήριξης στο x· υπάρχουν δηλαδή $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ και $c \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε
(1) $\langle u, x\rangle = c$,
(2) $\langle u, y\rangle \leqslant c \quad \forall\, y \in C$,
(3) $\langle u, y\rangle < c \quad$ για κάποιο $y \in C$.
Έπεται ότι πρέπει $\langle u, x_n\rangle < c$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, γιατί διαφορετικά θα είχε κανείς $\langle u, x_n\rangle = c$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, αφού η (2) ισχύει για $y = x_n$ για κάθε n, και επομένως και

$$\left\langle u, \sum_{n=1}^{k} t_n x_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{k} t_n \langle u, x_n\rangle = \sum_{n=1}^{k} t_n c = c$$

για κάθε κυρτό συνδυασμό $\sum_{n=1}^{k} t_n x_n$, $t_1, \ldots, t_k \in [0, 1]$, $\sum_{n=1}^{k} t_n = 1$, $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή θα είχε κανείς ότι $\langle u, y\rangle = c$ για κάθε $y \in C$, που αντίκειται στην συνθήκη (3). Αφού τώρα $\langle u, x_n\rangle < c$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, πρέπει

$$\left\langle u, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, x_n\rangle < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c = c,$$

αφού υποθέτουμε ότι $\lambda_n > 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, που αντίκειται στην συνθήκη (1). Άρα δεν μπορεί να υπάρχει τέτοιο υπερεπίπεδο στήριξης και άρα δεν μπορεί $x \in \mathrm{rb}(C)$· επομένως πρέπει τελικά $x \in \mathrm{ri}(C) \subseteq C$. $\square$

9. Το πολικό ενός μη κενού συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι το σύνολο

$$A^{\circ} := \{y \in \mathbb{R}^d \colon \langle x, y \rangle \leqslant 1 \ \forall\, x \in A\}\,.$$

(α) Δείξτε ότι το πολικό ενός πολυτόπου $P = \mathrm{conv}(\{v_1, \dots, v_n\})$ στον $\mathbb{R}^d$ είναι το πολύεδρο

$$P^{\circ} = \bigcap_{i=1}^{n} \{y \in \mathbb{R}^d \colon \langle y, v_i \rangle \leqslant 1\}\,.$$

(β) Δείξτε ότι το πολικό ενός πολυέδρου $\Pi = \bigcap_{i=1}^{n} \{y \in \mathbb{R}^d \colon \langle y, v_i \rangle \leqslant 1\}$ στον $\mathbb{R}^d$, όπου $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$, είναι το πολύτοπο $\Pi^{\circ} = \mathrm{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})$.
[Υπόδειξη: $A^{\circ\circ} := (A^{\circ})^{\circ} = \overline{\mathrm{conv}(A \cup \{0\})}$ για οποιοδήποτε μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}^d$.]

Λύση. (α) Έστω $P = \mathrm{conv}(\{v_1, \dots, v_n\})$ ένα πολύτοπο στον $\mathbb{R}^d$, και έστω

$$\Pi = \bigcap_{i=1}^{n} \{y \in \mathbb{R}^d \colon \langle y, v_i \rangle \leqslant 1\}\,.$$

Αν $y \in \Pi$ και $x \in P$, τότε $x = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ με $c_1, \cdots, c_n \in [0, 1]$ και $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$, και άρα

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i v_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle v_i, y \rangle \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i = 1.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $x \in P$, έπεται ότι $y \in P^{\circ}$ και αφού το $y \in \Pi$ ήταν αυθαίρετο έπεται ότι $\Pi \subseteq P^{\circ}$.

Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι προφανής. Αν $y \in P^{\circ}$, τότε πρέπει $\langle x, y \rangle \leqslant 1$ για κάθε $x \in P$, και άρα και για $x = v_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Έπεται ότι

$$y \in \{z \in \mathbb{R}^d \colon \langle z, v_i \rangle \leqslant 1\}$$

για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$, και άρα $y \in \Pi$. Αφού το $y \in P^{\circ}$ ήταν αυθαίρετο έπεται ότι $P^{\circ} \subseteq \Pi$, και άρα τελικά $P^{\circ} = \Pi$.

(β) Έστω $\Pi = \bigcap_{i=1}^{n} \{y \in \mathbb{R}^d \colon \langle y, v_i \rangle \leqslant 1\}$ ένα πολύεδρο στον $\mathbb{R}^d$, όπου $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$. Έστω P το πολύτοπο $P = \mathrm{conv}(\{v_1, \dots, v_n\})$. Από το (α) έχει κανείς ότι $P^{\circ} = \Pi$· άρα $\Pi^{\circ} = (P^{\circ})^{\circ} = P^{\circ\circ}$. Όμως

$$P^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{conv}(P \cup \{0\})} = \overline{\mathrm{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})} = \mathrm{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\}),$$

και άρα $\Pi^{\circ} = \mathrm{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})$.

Η ισότητα $\overline{\mathrm{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})} = \mathrm{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})$ έπεται από το γεγονός ότι κάθε πολύτοπο στον $\mathbb{R}^d$ είναι συμπαγές σύνολο (κυρτή θήκη συμπαγούς = συμπαγές) και άρα κλειστό. Το γεγονός ότι $\mathrm{conv}(P \cup \{0\}) = \mathrm{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})$ το βλέπει κανείς ως εξής. Επειδή $\{0, v_1, \dots, v_n\} \subseteq P \cup \{0\}$, έπεται ότι $\mathrm{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\}) \subseteq \mathrm{conv}(P \cup \{0\})$. Από την άλλη, επειδή $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \{0, v_1, \dots, v_n\}$ έπεται ότι

$$P = \mathrm{conv}(\{v_1, \dots, v_n\}) \subseteq \mathrm{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\}).$$

Προφανώς $0 \in \mathrm{conv}(\{0, v_1, \ldots, v_n\})$ επίσης, και επομένως

$$P \cup \{0\} \subseteq \mathrm{conv}(\{0, v_1, \ldots, v_n\}).$$

Τέλος, αφού το σύνολο $\mathrm{conv}(\{0, v_1, \ldots, v_n\})$ είναι κυρτό, πρέπει και

$$\mathrm{conv}(P \cup \{0\}) \subseteq \mathrm{conv}(\{0, v_1, \ldots, v_n\}).$$

Εναλλακτικά, δοθέντος του πολυέδρου $\Pi = \bigcap_{i=1}^{n} \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, v_i\rangle \leqslant 1\}$, μπορεί κανείς εξ' αρχής να θέσει $Q := \mathrm{conv}(\{0, v_1, \ldots, v_n\})$. Τότε από το (α) πάλι,

$$Q^{\circ} = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, v_i\rangle \leqslant 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, 0\rangle \leqslant 1\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, v_i\rangle \leqslant 1\} = \Pi,$$

αφού $\langle x, 0\rangle = 0$ και άρα $\langle x, 0\rangle \leqslant 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$. Έπεται τώρα ότι $\Pi^{\circ} = Q^{\circ\circ} = Q$, η δεύτερη ισότητα επειδή το Q είναι κυρτό, κλειστό και περιέχει το 0. □

Η Άσκηση 5 του 4ου Φυλλαδίου αντικαταστάθηκε από την επόμενη.

5′. Έστω K μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι

$$K = \bigcap_{\substack{u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ c \in \mathbb{R} \\ K \subseteq H^-(u,c) \\ K \cap H(u,c) \neq \varnothing}} H^-(u, c),$$

όπου, για $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ και $c \in \mathbb{R}$,

$$H(u, c) := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle u, x\rangle = c\}$$

και

$$H^-(u, c) := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle u, x\rangle \leqslant c\}.$$

Δηλαδή, το K είναι η τομή όλων των (κλειστών) ημιχώρων που το περιέχουν και το σύνορό τους τέμνει το K.

Λύση. Έστω

$$H = \bigcap_{\substack{u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ c \in \mathbb{R} \\ K \subseteq H^-(u,c)}} H^-(u, c).$$

Όπως αποδείχθηκε στο μάθημα, $H = K$. Πράγματι, $K \subseteq H$ γιατί κάθε σύνολο στην τομή που ορίζει το H περιέχει το K, άρα και η τομή τους περιέχει το K. Επιπλέον, αν $x \in H \setminus K$, τότε τα K και $\{x\}$ διαχωρίζονται αυστηρά γιατί το K είναι κλειστό και το $\{x\}$ συμπαγές. Άρα υπάρχουν $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε $\langle u, y\rangle < c - \varepsilon$ για κάθε $y \in K$ και $\langle u, x\rangle > c + \varepsilon$. Τότε όμως $K \subset H^-(u, c)$ και $x \notin H^-(u, c)$, που είναι άτοπο από τον ορισμό του H, γιατί $x \in H$ και άρα το x πρέπει να περιέχεται σε κάθε ημίχωρο που περιέχει το K και άρα και στον συγκεκριμένο $H^-(u, c)$.

Έστω τώρα

$$H' := \bigcap_{\substack{u\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\},\ c\in\mathbb{R} \\ K\subseteq H^-(u,c) \\ K\cap H(u,c)\neq\varnothing}} H^-(u,c)$$

η τομή όλων των κλειστών ημιχώρων που περιέχουν το K και το σύνορό τους τέμνει το K. Όπως πριν, κάθε ημίχωρος στην τομή που ορίζει το H' περιέχει το K, άρα και η τομή όλων αυτών, H', περιέχει το K. Έστω πάλι, προς άτοπο, ότι υπήρχε $x \in H' \setminus K$. Έστω $u := x - p_K(x) \neq 0$. Τότε

$$\langle u, y - p_K(x)\rangle = \langle x - p_K(x), y - p_K(x)\rangle \leqslant 0$$

για κάθε $y \in K$ και άρα $K \subseteq H^-(u,c)$, όπου $c := \langle u, p_K(x)\rangle$. Επίσης, $p_K(x) \in K \cap H(u,c)$ και άρα $K \cap H(u,c) \neq \varnothing$. Δηλαδή ο κλειστός ημίχωρος $H^-(u,c)$ περιέχει το K και το σύνορό του $H(u,c)$ τέμνει το K. Επειδή επομένως $x \in H'$, ο $H^-(u,c)$ πρέπει να περιέχει και το x, από τον ορισμό του H'. Όμως

$$\langle u, x - p_K(x)\rangle = \left\| x - p_K(x)\right\|_2^2 > 0,$$

επειδή $x \notin K$ και άρα $x \neq p_K(x)$. Συνεπώς

$$\langle u, x\rangle > \langle u, p_K(x)\rangle = c$$

και άρα $x \notin H^-(u,c)$. $\square$