Κυρτή Ανάλυση
Εαρινό Εξάμηνο 2019–2020
Φυλλάδιο 3

1. Έστω $x_0, x_1, \dots, x_k$ σημεία του $\mathbb{R}^d$ με την ιδιότητα ότι κάθε

$$x \in \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\})$$

γράφεται μονοσήμαντα σαν κυρτός συνδυασμός των x_i, $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Δείξτε ότι τότε τα $x_0, x_1, \dots, x_k$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα.

Λύση. Έστω $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ με

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0 \tag{1}$$

και

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i = 0, \tag{2}$$

και έστω ότι τα λ_i δεν είναι όλα μηδέν. Έστω

$$I^+ := \{i \in \{0, 1, \dots, n\} : \lambda_i > 0\} \quad \text{και} \quad I^- := \{i \in \{0, 1, \dots, n\} : \lambda_i < 0\} \cdot$$

τότε πρέπει $I^+ \neq \varnothing$ και $I^- \neq \varnothing$ λόγω της (1) και του γεγονότος ότι δεν είναι όλα τα λ_i μηδέν. Από την (1) έχει κανείς ότι

$$0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = \sum_{i \in I^+} \lambda_i + \sum_{i \in I^-} \lambda_i,$$

οπότε και

$$\sum_{i \in I^+} \lambda_i = -\sum_{i \in I^-} \lambda_i = \sum_{i \in I^-} (-\lambda_i),$$

και επιπλέον

$$\lambda := \sum_{i \in I^+} \lambda_i > 0,$$

επειδή $I^+ \neq \varnothing$. Από την (2), τώρα, έχει κανείς ότι

$$\sum_{i \in I^+} \lambda_i x_i = -\sum_{i \in I^-} \lambda_i x_i,$$

και διαιρώντας και τα δύο μέλη με $\lambda > 0$ ότι

$$\sum_{i \in I^+} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i = \sum_{i \in I^-} \frac{-\lambda_i}{\lambda} x_i, \tag{3}$$

με

$$\frac{\lambda_i}{\lambda} \geqslant 0 \quad \forall\, i \in I^+ \qquad \text{και} \qquad \frac{-\lambda_i}{\lambda} \geqslant 0 \quad \forall\, i \in I^-,$$

και
$$\sum_{i\in I^+}\frac{\lambda_i}{\lambda}=1 \qquad \text{και} \qquad \sum_{i\in I^-}\frac{-\lambda_i}{\lambda}=\sum_{i\in I^+}\frac{\lambda_i}{\lambda}=1.$$
Επομένως το δεξιό και αριστερό μέλος της (3) αποτελούν και τα δύο κυρτούς συνδυασμούς στοιχείων του $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$, και άρα έχουμε γράψει κάποιο στοιχείο του $\mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\})$ σαν κυρτό συνδυασμό των $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ με δύο διαφορετικούς τρόπους. Καταλήξαμε δηλαδή σε άτοπο, και επομένως πρέπει $\lambda_i = 0\ \forall\, i \in \{0, 1, \dots, n\}$. □

2. (α) Έστω A μη κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\mathrm{conv}(A)$ είναι επίσης ανοικτό.
(β) Δώστε παράδειγμα κλειστού συνόλου στον $\mathbb{R}^2$ του οποίου η κυρτή θήκη δεν είναι κλειστό σύνολο.

Λύση. (α) Έστω $x \in \mathrm{conv}(A)$. Τότε υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in A$, και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Αφού το A είναι ανοικτό, υπάρχουν $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ τέτοια ώστε $U_2(x_i, \varepsilon_i) \subseteq A$ για $i \in \{1, \dots, n\}$, όπου
$$U_2(y, \varepsilon) = \left\{z \in \mathbb{R}^d : \left\|z - y\right\|_2 < \varepsilon\right\}$$
συμβολίζει, για $y \in \mathbb{R}^d$ και $\varepsilon > 0$, την ανοικτή σφαίρα κέντρου x και ακτίνας ε. Έστω $\varepsilon := \min_{i\in\{1,\dots,n\}} \varepsilon_i$· τότε $\varepsilon > 0$ και $U_2(x_i, \varepsilon) \subseteq A$ για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$.

Έστω τώρα $y \in U_2(x, \varepsilon)$. Έστω $u := y - x$. Τότε $\|u\|_2 < \varepsilon$, και $x_i + u \in U_2(x_i, \varepsilon)$ επειδή $\left\|(x_i + u) - x_i\right\|_2 < \varepsilon$, για όλα τα $i \in \{1, \dots, n\}$· επομένως $x_i + u \in A\ \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$. Όμως
$$y = x + u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + u\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i + u),$$
και επομένως $y \in \mathrm{conv}(A)$, αφού γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός των στοιχείων $x_1 + u, \dots, x_n + u$ του A.
(β) Ένα απλό παράδειγμα είναι το σύνολο $B := \{(0, 1)\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\}$. Το σύνολο αυτό είναι προφανώς κλειστό, αφού καθένα από τα $\{(0, 1)\}$ (μονοσύνολο) και $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\}$ είναι κλειστό, αλλά η κυρτή του θήκη είναι το σύνολο
$$\mathrm{conv}(B) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y < 1\right\} \cup \{(0, 1)\},$$
το οποίο φυσικά δεν είναι κλειστό. Πράγματι, το σύνολο
$$C := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y < 1\right\} \cup \{(0, 1)\}$$
είναι κυρτό: αν $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$ με $y_1, y_2 \in [0, 1)$, και $\lambda \in (0, 1)$, τότε
$$\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)$$
και προφανώς $0 \leqslant \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 < \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 = 1$, αφού $\lambda \notin \{0, 1\}$, και άρα
$$\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) \in C\cdot$$

και αν $(x_1, y_1) \in C$ με $y_1 \in [0,1)$ και $(x_2, y_2) = (0,1)$, και $\lambda \in (0,1)$ πάλι, τότε

$$\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) = (\lambda x_1, \lambda y_1 + (1-\lambda)),$$

και $\lambda y_1 + (1-\lambda) < \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) = 1$, αφού $\lambda > 0$, και άρα $\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) \in C$ και πάλι. Αφού λοιπόν το C είναι κυρτό, και αφού περιέχει το B, περιέχει και την κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(B)$ του B.

Αντιστρόφως, αν $(x, y) \in C$, τότε $y \in [0,1]$. Αν $y = 0$ ή $y = 1$ τότε $(x, y) \in B \subseteq \mathrm{conv}(B)$. Αν πάλι $(x, y) \in C$ με $0 < y < 1$, θεωρεί κανείς την ευθεία

$$Y = \frac{y-1}{x} X + 1$$

που περνάει από το (x, y) και το σημείο $(0,1)$, αν $x \neq 0$, ή την ευθεία $X = 0$ αν $x = 0$, η οποία τέμνει τον άξονα των X στο σημείο $(x/(1-y), 0)$· το σημείο (x, y) είναι τότε κυρτός συνδυασμός των σημείων $(x/(1-y), 0)$ και $(0,1)$ του B:

$$(x, y) = (1-y)\left(\frac{x}{1-y}, 0\right) + y(0,1).$$

Αυτό δείχνει ότι $C \subseteq \mathrm{conv}(B)$, και άρα τελικά $C = \mathrm{conv}(B)$. $\square$

3. (α) Έστω S μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι τα S και $\mathrm{conv}(S)$ έχουν την ίδια διάμετρο.
(β) Έστω S_1 και S_2 μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{conv}(S_1 + S_2) = \mathrm{conv}(S_1) + \mathrm{conv}(S_2).$$

(γ) Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\mathrm{conv}(S^{\mathrm{o}}) \subseteq (\mathrm{conv}(S))^{\mathrm{o}}$, όπου A^{o} συμβολίζει το εσωτερικό του A για ένα $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Ισχύει πάντα ισότητα;
[Υπόδειξη: αν $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ και $\sum_{j=1}^m \mu_j = 1$, τότε και $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\lambda_i \mu_j) = (\sum_{i=1}^n \lambda_i) \cdot (\sum_{j=1}^m \mu_j) = 1 \cdot 1 = 1$.]

Λύση. (α) Αφού $S \subseteq \mathrm{conv}(S)$ έχει κανείς άμεσα ότι $\mathrm{diam}(S) \leqslant \mathrm{diam}(\mathrm{conv}(S))$. Αντιστρόφως, έστω $x, y \in \mathrm{conv}(S)$, και έστω ότι

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \qquad \text{και} \qquad y = \sum_{j=1}^m \mu_j y_j,$$

με $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in S$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m \in [0,1]$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{j=1}^m \mu_j = 1$, και $n, m \in \mathbb{N}$. Τότε

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \left(\sum_{j=1}^m \mu_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j x_i,$$

και όμοια $y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j y_j$, και άρα

$$\begin{aligned}
\left\|x - y\right\|_2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j x_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j y_j \right\|_2 \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j (x_i - y_j) \right\|_2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j \left\|x_i - y_j\right\|_2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j \operatorname{diam}(S) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j \right) \operatorname{diam}(S) \\
&= \operatorname{diam}(S).
\end{aligned}$$

Αφού τα $x, y \in \operatorname{conv}(S)$ ήταν αυθαίρετα, αυτό δείχνει ότι και $\operatorname{diam}(\operatorname{conv}(S)) \leqslant \operatorname{diam}(S)$, και άρα τελικά $\operatorname{diam}(\operatorname{conv}(S)) = \operatorname{diam}(S)$.

(β) Αν $x \in \operatorname{conv}(S_1 + S_2)$, τότε $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i + y_i)$ με $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, και $x_1, \ldots, x_n \in S_1$ και $y_1, \ldots, y_n \in S_2$. Τότε προφανώς

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}_{\in \operatorname{conv}(S_1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i}_{\in \operatorname{conv}(S_2)}$$

και $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \operatorname{conv}(S_1)$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \in \operatorname{conv}(S_2)$· άρα $x \in \operatorname{conv}(S_1) + \operatorname{conv}(S_2)$.

Αντιστρόφως, έστω $x \in \operatorname{conv}(S_1)$ και $y \in \operatorname{conv}(S_2)$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ και $\mu_1, \ldots, \mu_m \in [0, 1]$, $n, m \in \mathbb{N}$, με $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j = 1$, και $x_1, \ldots, x_n \in S_1$ και $y_1, \ldots, y_m \in S_2$, τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ και $y = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j$. Τότε

$$\begin{aligned}
x + y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j \right) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j y_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j (x_i + y_j),
\end{aligned}$$

και $\lambda_i \mu_j \geqslant 0 \ \forall \, (i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j \right) = 1 \cdot 1 = 1\cdot$$

γράψαμε δηλαδή το $x+y$ σαν κυρτό συνδυασμό των στοιχείων x_i+y_j, $(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}$, του S_1+S_2. Έπεται ότι $x+y\in\operatorname{conv}(S_1+S_2)$.

(γ) Έστω $S\subseteq\mathbb{R}^d$, $S\neq\varnothing$. Επειδή $S^{\mathrm{o}}\subseteq S$ πρέπει $\operatorname{conv}(S^{\mathrm{o}})\subseteq\operatorname{conv}(S)$. Από την Άσκηση 2(α) όμως, $\operatorname{conv}(S^{\mathrm{o}})$ είναι ανοικτό σύνολο, και αφού περιέχεται στο $\operatorname{conv}(S)$ πρέπει να περιέχεται και στο εσωτερικό του $(\operatorname{conv}(S))^{\mathrm{o}}$, αφού το τελευταίο είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο $\operatorname{conv}(S)$ (η ένωση όλων των ανοικτών που περιέχονται στο $\operatorname{conv}(S)$).

Η ισότητα $\operatorname{conv}(S^{\mathrm{o}})=[\operatorname{conv}(S)]^{\mathrm{o}}$ δεν ισχύει πάντα. Αν, για παράδειγμα, το S αποτελείται από τρία μη συνευθειακά σημεία στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$, ας πούμε τα $(0,0)$, $(1,0)$ και $(0,1)$, τότε προφανώς $S^{\mathrm{o}}=\varnothing$ και άρα και $\operatorname{conv}(S^{\mathrm{o}})=\varnothing$, αλλά $\operatorname{conv}(S)$ είναι ένα μη τετριμμένο τρίγωνο, εν προκειμένω το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$ και $(0,1)$, και άρα $[\operatorname{conv}(S)]^{\mathrm{o}}$ είναι το εσωτερικό αυτού του τριγώνου που προφανώς δεν είναι κενό. Συγκεκριμένα, $\operatorname{conv}(S)=\operatorname{conv}(\{x_0,x_1,x_2\})$ είναι ένα simplex, $x_0=(0,0)$, $x_1=(1,0)$, $x_2=(0,1)$, και άρα

$$[\operatorname{conv}(S)]^{\mathrm{o}}=\{c_0x_0+c_1x_1+c_2x_2\colon c_0,c_1,c_2\in(0,1),\ c_0+c_1+c_2=1\},$$

που είναι μη κενό αφού περιέχει το σημείο $\frac{1}{3}x_0+\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, για παράδειγμα. $\square$

4. Έστω $\delta>0$, $m,d\in\mathbb{N}$ με $m\geqslant d+1$, και $K_1,\dots,K_m$ μη κενά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, με την ιδιότητα ότι για κάθε οικογένεια $d+1$ από τα K_i, δηλαδή για κάθε $1\leqslant i_1<\cdots<i_{d+1}\leqslant m$, υπάρχει σημείο $x\in\mathbb{R}^d$ του οποίου η απόσταση από κάθε K_{i_j} είναι $\leqslant\delta$, δηλαδή τέτοιο ώστε $d(x,K_{i_j})\leqslant\delta$ για κάθε $j\in\{1,\dots,d+1\}$. Δείξτε ότι τότε υπάρχει $x\in\mathbb{R}^d$ του οποίου η απόσταση από όλα τα K_i είναι $\leqslant\delta$, δηλαδή τέτοιο ώστε $d(x,K_i)\leqslant\delta$ για κάθε $i\in\{1,\dots,m\}$.

Λύση. Έστω

$$B_i:=\{x\in\mathbb{R}^d\colon d(x,K_i)\leqslant\delta\}\qquad i\in\{1,\dots,m\}\cdot$$

τότε κάθε B_i είναι κυρτό σύνολο. Πράγματι, αν $x,y\in B_i$ και $\lambda\in[0,1]$, τότε

$$\begin{aligned}\|\lambda x+(1-\lambda)y-z\|_2&=\|\lambda x+(1-\lambda)y-\lambda z-(1-\lambda)z\|_2\\&=\|\lambda(x-z)+(1-\lambda)(y-z)\|_2\\&\leqslant\lambda\|x-z\|_2+(1-\lambda)\|y-z\|_2\\&\leqslant\lambda\delta+(1-\lambda)\delta\\&=\delta,\end{aligned}$$

για κάθε $z\in K_i$, και άρα $d(\lambda x+(1-\lambda)y,K_i)\leqslant\delta$, δηλαδή $\lambda x+(1-\lambda)y\in B_i$. Από την υπόθεση τώρα έχει κανείς ότι κάθε επιλογή $d+1$ από τα B_i έχει μη κενή τομή. Από το Θεώρημα του Helly έπεται ότι η τομή όλων των B_i είναι μη κενή: $\bigcap_{i=1}^m B_i\neq\varnothing$. Αυτό όμως σημαίνει ακριβώς ότι υπάρχει x με $x\in B_i$ για κάθε i, δηλαδή τέτοιο ώστε $d(x,K_i)\leqslant\delta$ για κάθε $i\in\{1,\dots,m\}$. $\square$

5. (α) Έστω K μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $x\in\operatorname{ri}(K)$ ανν για κάθε $y\in K\setminus\{x\}$ υπάρχει $\mu>1$ τέτοιο ώστε $\mu x+(1-\mu)y\in K$.

(β) Δείξτε ότι αν $x_0,x_1,\dots,x_k$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα σημεία του $\mathbb{R}^d$ και

$$S:=\operatorname{conv}(\{x_0,x_1,\dots,x_k\})$$

το αντίστοιχο k-simplex, τότε

$$\mathrm{ri}(S) = \left\{ \sum_{i=0}^{k} c_i x_i \colon c_0, c_1, \ldots, c_k \in (0,1),\ \sum_{i=0}^{k} c_i = 1 \right\}.$$

Λύση. (α) Έστω $x \in \mathrm{ri}(K)$· τότε, εξ' ορισμού, υπάρχει $r > 0$ ώστε

$$U_2(x,r) \cap \mathrm{aff}(K) \subseteq K,$$

όπου $U_2(x,r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \colon \left\| y - x \right\|_2 < r \right\}$ η ανοικτή σφαίρα κέντρου x και ακτίνας r. Έστω τώρα και $y \in K \setminus \{x\}$. Τότε

$$\left\| \mu x + (1-\mu)y - x \right\|_2 = |1-\mu| \left\| y - x \right\|_2 < r$$

για $1 \leqslant \mu < 1 + r/\left\| x - y \right\|_2$, και για αυτά τα μ έχει κανείς ότι $\mu x + (1-\mu)y \in U_2(x,r) \subseteq K$. Άρα υπάρχει $\mu > 1$ ώστε $\mu x + (1-\mu)y \in K$.

Αντιστρόφως, έστω $x \in \mathbb{R}^d$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $y \in K \setminus \{x\}$ υπάρχει $\mu > 1$ τέτοιο ώστε $\mu x + (1-\mu)y \in K$· πρέπει να δειχθεί ότι $x \in \mathrm{ri}(K)$. Αφού το K είναι κυρτό, $\mathrm{ri}(K) \neq \varnothing$, και έστω $y \in \mathrm{ri}(K)$. Αν $x = y$ τότε $x \in \mathrm{ri}(K)$. Έστω λοιπόν ότι $x \neq y$. Τότε υπάρχει $\mu > 1$ τέτοιο ώστε $\mu x + (1-\mu)y \in K$, και έστω z αυτό το σημείο, δηλαδή $z = \mu x + (1-\mu)y$ για αυτό το μ. Τότε $[y,z) \subseteq \mathrm{ri}(K)$ και προφανώς $x \in [y,z)$: $x = \lambda z + (1-\lambda)y$ με $\lambda = 1/\mu \in (0,1)$. Έπεται ότι $x \in \mathrm{ri}(K)$.

(β) Έχει κανείς ότι

$$S = \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}) = \left\{ \sum_{i=0}^{k} c_i x_i \colon c_0, c_1, \ldots, c_k \in [0,1],\ \sum_{i=0}^{k} c_i = 1 \right\}.$$

Έστω λοιπόν $x = \sum_{i=0}^{k} c_i x_i$ με $c_0, c_1, \ldots, c_k \in (0,1)$ και $\sum_{i=0}^{k} c_i = 1$, και έστω $y \in S \setminus \{x\}$· τότε το y γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός $\sum_{i=0}^{k} a_i x_i$, $a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1]$ και $\sum_{i=0}^{k} a_i = 1$. Τότε

$$\mu x + (1-\mu)y = \sum_{i=0}^{k} [\mu c_i + (1-\mu)a_i] x_i. \tag{4}$$

Έστω $A := \max\{a_0, a_1, \ldots, a_k\} \leqslant 1$ και $\varepsilon > 0$ με $\varepsilon < \min\{A, c_0, c_1, \ldots, c_k\}$· έστω επίσης μ με $1 < \mu \leqslant A/(A-\varepsilon)$. Τότε $\mu c_i + (1-\mu)a_i \geqslant \mu\varepsilon + (1-\mu)A \geqslant 0$ για κάθε $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, και η (4) δίνει ότι $\mu x + (1-\mu)y \in K$, αφού και

$$\sum_{i=1}^{k} \mu c_i + (1-\mu)a_i = \mu \sum_{i=1}^{k} c_i + (1-\mu) \sum_{i=1}^{k} a_i = \mu + (1-\mu) = 1.$$

Δηλαδή, για κάθε $y \in K \setminus \{x\}$, βρέθηκε $\mu > 1$ τέτοιο ώστε $\mu x + (1-\mu)y \in K$. Έπεται ότι $x \in \mathrm{ri}(S)$. Αυτό δείχνει ότι

$$\left\{ \sum_{i=0}^{k} c_i x_i \colon c_0, c_1, \ldots, c_k \in (0,1),\ \sum_{i=0}^{k} c_i = 1 \right\} \subseteq \mathrm{ri}(S). \tag{5}$$

Έστω τώρα $x \in S$, με $x = \sum_{i=0}^k c_i x_i$ με $c_0, c_1, \ldots, c_k \in [0,1]$ και $\sum_{i=0}^k c_i = 1$, και $c_i = 0$ για κάποιο $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$· θα δείξουμε ότι τότε $x \notin \mathrm{ri}(S)$, και αυτό δείχνει ότι ο εγκλεισμός (5) είναι τελικά ισότητα. Έστω $y = x_i$· τότε $y \neq x$ διότι κάθε σημείο της αφφινικής θήκης των $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ γράφεται μονοσήμαντα σαν αφφινικός συνδυασμός των $x_0, x_1, \ldots, x_k$, λόγω της αφφινικής ανεξαρτησίας των $x_0, x_1, \ldots, x_k$· αν είχαμε $x_i = x = \sum_{j=0}^k c_j x_j$ θα είχαμε γράψει το ίδιο στοιχείο σαν αφφινικό συνδυασμό των $x_0, x_1, \ldots, x_k$ με συντελεστή του x_i ίσο με 1 την μία φορά και με συντελεστή $c_i = 0$ την άλλη. (Ισοδύναμα, αν είχαμε $x_i = \sum_{j=0}^k c_j x_j$, τότε θα είχαμε ότι $\sum_{j \in \{0,1,\ldots,k\} \setminus \{i\}} c_j x_j - x_i = 0$, με συντελεστές που έχουν άθροισμα $\sum_{j=0}^k c_j + (-1) = 1 - 1 = 0$, και κάποιον από αυτούς, τον συντελεστή -1, μη μηδενικό· αυτό αντίκειται στην αφφινική ανεξαρτησία των $x_0, x_1, \ldots, x_k$.) Από την άλλη,

$$\mu x + (1-\mu)y = \mu x + (1-\mu)x_i = \sum_{j \in \{0,1,\ldots,k\} \setminus \{i\}} \mu c_j x_j + (1-\mu)x_i,$$

και για $\mu > 1$ αυτό είναι ένας αφφινικός συνδυασμός των $x_0, x_1, \ldots, x_k$ με τον συντελεστή $1-\mu$ του x_i αρνητικό, και άρα δεν μπορεί να ισούται με ένα στοιχείο του S, που αποτελείται αποκλειστικά από αφφινικούς συνδυασμούς με μη αρνητικούς συντελεστές, πάλι λόγω του ότι κάθε στοιχείο της αφφινικής θήκης των $x_0, x_1, \ldots, x_k$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν αφφινκός συνδυασμός των $x_0, x_1, \ldots, x_k$· ισοδύναμα, αν είχαμε $\mu x + (1-\mu)y \in S$, δηλαδή

$$\mu x + (1-\mu)y = \sum_{j=0}^k a_j x_j \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j \in \{0,1,\ldots,k\} \setminus \{i\}} \mu c_j x_j + (1-\mu)x_i = \sum_{j=0}^k a_j x_j,$$

για κάποια $a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1]$ και $\sum_{j=0}^k a_j = 1$, με $\mu > 1$, τότε θα είχαμε ότι

$$\sum_{j \in \{0,1,\ldots,k\} \setminus \{i\}} (\mu c_j - a_j)x_j + [(1-\mu) - a_i]x_i = 0,$$

με τους συντελεστές να έχουν άθροισμα

$$\sum_{j \in \{0,1,\ldots,k\} \setminus \{i\}} (\mu c_j - a_j) + [(1-\mu) - a_i] = \sum_{j \in \{0,1,\ldots,k\} \setminus \{i\}} \mu c_j + (1-\mu) - \sum_{j=0}^k a_j = \mu + (1-\mu) - 1 = 0,$$

αλλά με $(1-\mu) - a_i < -a_i \leqslant 0$· και αυτό θα ήταν και πάλι σε αντίφαση με την αφφινική ανεξαρτησία των $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Δείξαμε επομένως ότι για $y = x_i$, $\mu x + (1-\mu)y \notin S \ \forall \mu > 1$ και άρα $x \notin \mathrm{ri}(S)$, από το (α). Αφού αυτό ισχύει για κάθε $x = \sum_{i=0}^k c_i x_i \in S$ με $c_i = 0$ για κάποιο $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, έπεται ότι αυτά τα στοιχεία του S δεν ανήκουν στο $\mathrm{ri}(S)$ και επομένως ο εγκλεισμός (5) είναι τελικά ισότητα. □

6. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό και κυρτό. Δείξτε ότι:
(α) $\mathrm{aff}(K) = \mathrm{aff}(\overline{K}) = \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K))$·
(β) $\mathrm{ri}(K) = \mathrm{ri}(\overline{K}) = \mathrm{ri}(\mathrm{ri}(K)$·
(γ) $\mathrm{rb}(K) = \mathrm{rb}(\overline{K}) = \mathrm{rb}(\mathrm{ri}(K))$.

Λύση. (α) Προφανώς, αφού $\mathrm{ri}(S) \subseteq S \subseteq \overline{S}$, έχει κανείς αυτόματα ότι $\mathrm{aff}(\mathrm{ri}(S)) \subseteq \mathrm{aff}(S) \subseteq \mathrm{aff}(\overline{S})$ για οποιοδήποτε $S \subseteq \mathbb{R}^d$· για αυτούς τους εγκλεισμούς δηλαδή δεν απαιτείται κυρτότητα. Επίσης, $\mathrm{aff}(S)$ είναι κλειστό σύνολο για οποιοδήποτε $S \subseteq \mathbb{R}^d$, γιατί κάθε αφφινικός υπόχωρος είναι κλειστό σύνολο στον $\mathbb{R}^d$, γιατί κάθε γραμμικός υπόχωρος είναι κλειστό σύνολο στον $\mathbb{R}^d$. Έπεται τώρα από αυτό ότι $\overline{S} \subseteq \mathrm{aff}(S)$, αφού $\overline{S}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το S, και αφού τώρα ο $\mathrm{aff}(S)$ είναι αφφινικός υπόχωρος, πρέπει και $\mathrm{aff}(\overline{S}) \subseteq \mathrm{aff}(S)$, γιατί η αφφινική θήκη $\mathrm{aff}(\overline{S})$ είναι ο μικρότερος αφφινικός υπόχωρος που περιέχει το $\overline{S}$. Επομένως και αυτός ο εγκλεισμός δεν απαιτεί κυρτότητα, και άρα η ισότητα $\mathrm{aff}(S) = \mathrm{aff}(\overline{S})$ ισχύει για οποιοδήποτε υποσύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^d$. Έστω τώρα ότι το K είναι κυρτό, μη κενό· θα δειχθεί ότι $\overline{K} \subseteq \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K))$. Πράγματι, έστω $y \in \overline{K}$, και έστω $x \in \mathrm{ri}(K)$, το οποίο γνωρίζουμε ότι είναι μη κενό. Αν $y = x$ τότε $y \in \mathrm{ri}(K) \subseteq \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K))$· αν πάλι $y \neq x$, τότε ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα $[x, y)$ περιέχεται στο $\mathrm{ri}(K)$, και αφού το $\mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K))$ είναι κλειστό, πρέπει $[x, y] = \overline{[x, y)} \subseteq \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K))$, και άρα $y \in \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K))$. Επομένως $\overline{K} \subseteq \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K))$. Έπεται τώρα άμεσα ότι και $\mathrm{aff}(\overline{K}) \subseteq \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K))$, γιατί η κυρτή θήκη $\mathrm{aff}(\overline{K})$ είναι ο μικρότερος αφφινικός υπόχωρος που περιέχει το $\overline{K}$.

(β) Από το (α) έχει κανείς ότι $\mathrm{aff}(K) = \mathrm{aff}(\overline{K}) = \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K))$· αφού $\mathrm{ri}(K) \subseteq K \subseteq \overline{K}$, έπεται ότι $\mathrm{ri}(\mathrm{ri}(K)) \subseteq \mathrm{ri}(K) \subseteq \mathrm{ri}(\overline{K})$, επειδή τα εσωτερικά είναι ως προς την ίδια τοπολογία, την σχετική τοπολογία του $\mathrm{aff}(K) = \mathrm{aff}(\overline{K}) = \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K))$, και άρα $\mathrm{ri}(\mathrm{ri}(K))$, που είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο σε αυτήν την τοπολογία που περιέχεται στο $\mathrm{ri}(K)$, θα περιέχεται και στο K και άρα και στο $\mathrm{ri}(K)$, που είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο σε αυτήν την τοπολογία που περιέχεται στο K, και όμοια $\mathrm{ri}(K) \subseteq \mathrm{ri}(\overline{K})$. Εναλλακτικά, μπορεί να επιχειρηματολογήσει κανείς ως εξής. Αν $x \in \mathrm{ri}(\mathrm{ri}(K))$, τότε για κάποιο $r > 0$ έχει κανείς ότι $U_2(x, r) \cap \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K)) \subseteq \mathrm{ri}(K)$, όπου $U_2(x, r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d : \left\| x - y \right\|_2 < r \right\}$ η ανοικτή σφαίρα κέντρου x και ακτίνας r στον $\mathbb{R}^d$. Αφού $U_2(x, r) \cap \mathrm{aff}(K) = U_2(x, r) \cap \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K))$, έπεται ότι

$$U_2(x, r) \cap \mathrm{aff}(K) = U_2(x, r) \cap \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K)) \subseteq \mathrm{ri}(K) \subseteq K$$

και άρα $x \in \mathrm{ri}(K)$. Αυτό δείχνει ότι $\mathrm{ri}(\mathrm{ri}(K)) \subseteq \mathrm{ri}(K)$. Όμοια, αν $y \in \mathrm{ri}(K)$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $U_2(y, \delta) \cap \mathrm{aff}(K) \subseteq K$· τότε $U_2(y, \delta) \cap \mathrm{aff}(\overline{K}) = U_2(y, \delta) \cap \mathrm{aff}(K) \subseteq K \subseteq \overline{K}$, και άρα $y \in \mathrm{ri}(\overline{K})$. Αυτό δείχνει ότι και $\mathrm{ri}(K) \subseteq \mathrm{ri}(\overline{K})$.

Το $\mathrm{ri}(K)$ είναι ανοικτό σύνολο στην σχετική τοπολογία του $\mathrm{aff}(K)$ και άρα και ανοικτό σύνολο στην σχετική τοπολογία του $\mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K))$, αφού από το (α) $\mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K)) = \mathrm{aff}(K)$. Επίσης περιέχεται στο $\mathrm{ri}(K)$ και άρα πρέπει να περιέχεται και στο εσωτερικό του τελευταίου ως προς την σχετική τοπολογία του $\mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K))$, δηλαδή το $\mathrm{ri}(\mathrm{ri}(K))$, αφού το τελευταίο είναι το μεγαλύτερο ανοικτό στην σχετική τοπολογία του $\mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K))$ που περιέχεται στο $\mathrm{ri}(K)$. Άρα $\mathrm{ri}(K) \subseteq \mathrm{ri}(\mathrm{ri}(K))$, και επομένως $\mathrm{ri}(K) = \mathrm{ri}(\mathrm{ri}(K))$.

Θα δειχθεί τέλος τώρα ότι και $\mathrm{ri}(\overline{K}) \subseteq \mathrm{ri}(K)$. Έστω $y \in \mathrm{ri}(\overline{K})$. Έστω επίσης $x \in \mathrm{ri}(K)$. Αν $x = y$, τότε $y \in \mathrm{ri}(K)$. Αν πάλι $y \neq x$, τότε υπάρχει $\mu > 1$ τέτοιο ώστε $z = \mu y + (1 - \mu) x \in \overline{K}$, από την Άσκηση 5(α). Τότε όμως $y \in [x, z)$ ($y = \lambda z + (1 - \lambda) x$ με $\lambda := 1/\mu \in (0, 1)$), και $[x, z) \subseteq \mathrm{ri}(K)$, αφού $x \in \mathrm{ri}(K)$ και $z \in \overline{K}$· άρα πρέπει $y \in \mathrm{ri}(K)$.

(γ) Εξ ορισμού, $\mathrm{rb}(K) = \overline{K} \setminus \mathrm{ri}(K)$, $\mathrm{rb}(\overline{K}) = \overline{\overline{K}} \setminus \mathrm{ri}(\overline{K})$ και $\mathrm{rb}(\mathrm{ri}(K)) = \overline{\mathrm{ri}(K)} \setminus \mathrm{ri}(\mathrm{ri}(K))$. Αφού $\overline{\overline{K}} = \overline{K}$ και $\mathrm{ri}(\overline{K}) = \mathrm{ri}(K)$, από το (β), έπεται άμεσα ότι $\mathrm{rb}(\overline{K}) = \mathrm{rb}\, K$. Επίσης $\mathrm{ri}(\mathrm{ri}(K)) = \mathrm{ri}(K)$, από το (β) πάλι, και $\overline{\mathrm{ri}(K)} = \overline{K}$. Πράγματι, $\mathrm{ri}(K) \subseteq K \Rightarrow \overline{\mathrm{ri}(K)} \subseteq \overline{K}$· και αν $y \in \overline{K}$, έστω και

$x \in \mathrm{ri}(K)$· τότε $[x, y) \in \mathrm{ri}(K)$, και επομένως $[x, y] = \overline{[x, y)} \subseteq \overline{\mathrm{ri}(K)}$, που δίνει ότι $y \in \overline{\mathrm{ri}(K)}$. Άρα όντως $\overline{\mathrm{ri}(K)} = \overline{K}$, που σε συνδυασμό με την $\mathrm{ri}(\mathrm{ri}(K)) = \mathrm{ri}(K)$ δίνουν ότι $\mathrm{rb}(\mathrm{ri}(K)) = \mathrm{rb}(K)$. □

7. (α) Έστω K_1, K_2 κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, τέτοια ώστε $\mathrm{ri}(K_1) \cap \mathrm{ri}(K_2) \neq \varnothing$. Δείξτε ότι $\mathrm{ri}(K_1 \cap K_2) = \mathrm{ri}(K_1) \cap \mathrm{ri}(K_2)$.

(β) Έστω K_i, $i \in I$, οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, τέτοια ώστε $\bigcap_{i\in I} \mathrm{ri}(K_i) \neq \varnothing$. Δείξτε ότι $\overline{\bigcap_{i\in I} K_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{K_i}$.

Λύση. (α) Θα χρησιμοποιηθεί η Άσκηση 5(α) πάλι. Έστω $x \in \mathrm{ri}(K_1) \cap \mathrm{ri}(K_2)$ και έστω και $y \in K_1 \cap K_2$ με $y \neq x$. Τότε $y \in K_1$ και $x \in \mathrm{ri}(K_1)$, με $y \neq x$, και άρα υπάρχει $\mu_1 > 1$ ώστε $z_1 := \mu_1 x + (1 - \mu_1)y \in K_1$, από την Άσκηση 5(α). Όμοια υπάρχει $\mu_2 > 1$ ώστε $z_2 := \mu_2 x + (1 - \mu_2)y \in K_2$. Τότε, από κυρτότητα, $\mu x + (1 - \mu)y \in K_1$ για κάθε $\mu \in [0, \mu_1]$ και $\mu x + (1 - \mu)y \in K_2$ για κάθε $\mu \in [0, \mu_2]$, επειδή $y \in K_i$ και $z_i = \mu_i x + (1 - \mu_i)y \in K_i$ και άρα και $[y, z_i] \subseteq K_i$, $i \in \{1, 2\}$, και

$$\mu x + (1 - \mu)y = [\mu_i x + (1 - \mu_i)y]\frac{\mu}{\mu_i} + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_i}\right)y = \frac{\mu}{\mu_i} z_i + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_i}\right)y \in [y, z_i]$$

για $\mu \in [0, \mu_i]$, $i \in \{1, 2\}$. Έπεται ότι, αν $\mu := \min\{\mu_1, \mu_2\} > 1$, τότε $\mu x + (1 - \mu)y \in K_1 \cap K_2$. Αποδείχθηκε δηλαδή ότι για κάθε $y \in K_1 \cap K_2$ με $y \neq x$, υπάρχει $\mu > 1$ ώστε $\mu x + (1 - \mu)y \in K_1 \cap K_2$. Έπεται από την Άσκηση 5(α) πάλι ότι $x \in \mathrm{ri}(K_1 \cap K_2)$. Αφού $x \in \mathrm{ri}(K_1) \cap \mathrm{ri}(K_2)$ ήταν αυθαίρετο, αυτό δείχνει ότι $\mathrm{ri}(K_1) \cap \mathrm{ri}(K_2) \subseteq \mathrm{ri}(K_1 \cap K_2)$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \mathrm{ri}(K_1 \cap K_2)$. Έστω και $y \in \mathrm{ri}(K_1) \cap \mathrm{ri}(K_2)$, το οποίο υποθέτουμε μη κενό. Αν $y = x$ τότε $x \in \mathrm{ri}(K_1) \cap \mathrm{ri}(K_2)$. Αν $y \neq x$, υπάρχει $\mu > 1$ τέτοιο ώστε $z := \mu x + (1 - \mu)y \in K_1 \cap K_2$, από την Άσκηση 5(α), αφού $x \in \mathrm{ri}(K_1 \cap K_2)$ και $y \in \mathrm{ri}(K_1) \cap \mathrm{ri}(K_2) \subseteq K_1 \cap K_2$, με $y \neq x$. Τότε όμως, επειδή $y \in \mathrm{ri}(K_1)$, αφού $y \in \mathrm{ri}(K_1) \cap \mathrm{ri}(K_2)$, και $z \in \overline{K_1}$, αφού $z \in K_1 \cap K_2$ και άρα $z \in K_1$, πρέπει και $[y, z) \subseteq \mathrm{ri}(K_1)$· όμως $x \in [y, z)$ (πράγματι $x = \mu^{-1}z + (1 - \mu^{-1})y$, και $\mu^{-1} \in (0, 1)$) και άρα πρέπει $x \in \mathrm{ri}(K_1)$. Όμοια $x \in \mathrm{ri}(K_2)$ και έτσι τελικά $x \in \mathrm{ri}(K_1) \cap \mathrm{ri}(K_2)$. Αφού το x ήταν αυθαίρετο στοιχείο του $\mathrm{ri}(K_1 \cap K_2)$, έπεται ότι $\mathrm{ri}(K_1 \cap K_2) \subseteq \mathrm{ri}(K_1) \cap \mathrm{ri}(K_2)$, και άρα τελικά $\mathrm{ri}(K_1 \cap K_2) = \mathrm{ri}(K_1) \cap \mathrm{ri}(K_2)$.

(β) Προφανώς $\bigcap_{i\in I} K_i \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{K_i}$ αφού $K_i \subseteq \overline{K_i}$ για κάθε $i \in I$· επειδή τώρα το $\bigcap_{i\in I} \overline{K_i}$ είναι κλειστό (τομή κλειστών), έπεται ότι και $\overline{\bigcap_{i\in I} K_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{K_i}$, αφού η κλειστή θήκη $\overline{\bigcap_{i\in I} K_i}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το $\bigcap_{i\in I} K_i$.

Για το αντίστροφο, επιλέγουμε πρώτα ένα $y \in \bigcap_{i\in I} \mathrm{ri}(K_i)$. Έστω τώρα $x \in \bigcap_{i\in I} \overline{K_i}$. Τότε $[y, x) \subseteq \mathrm{ri}(K_i)$ $\forall\, i \in I$. Επομένως $[y, x) \subseteq K_i$ $\forall\, i \in I$ και άρα $[y, x) \subseteq \bigcap_{i\in I} K_i$. Έπεται ότι $[y, x] = \overline{[y, x)} \subseteq \overline{\bigcap_{i\in I} K_i}$ και άρα $x \in \overline{\bigcap_{i\in I} K_i}$. Αυτό αποδεικνύει τον αντίστροφο εγκλεισμό $\bigcap_{i\in I} \overline{K_i} \subseteq \overline{\bigcap_{i\in I} K_i}$ και άρα τελικά $\bigcap_{i\in I} \overline{K_i} = \overline{\bigcap_{i\in I} K_i}$. □

8. Έστω $S = \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_d\})$ ένα d-simplex στον $\mathbb{R}^d$ και έστω $y \in S^{\circ}$. Δείξτε ότι τα

$$S_i = \mathrm{conv}([\{x_0, x_1, \ldots, x_d\} \setminus \{x_i\}] \cup \{y\}) \qquad i \in \{1, \ldots, d\},$$

είναι d-simplices, έχουν ανά δύο ξένα εσωτερικά, και $S = S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_d$.

Λύση. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι τα S_i αποτελούν d-simplices, ότι δηλαδή τα σύνολα $(\{x_0, x_1, \ldots, x_d\} \setminus x_i) \cup \{y\}$ αποτελούνται από αφφινικά ανεξάρτητα σημεία. Εξ΄ υποθέσεως, υπάρχουν καταρχήν $c_0, c_1, \ldots, c_d \in (0,1)$, με $\sum_{i=0}^{d} c_i = 1$, τέτοια ώστε

$$y = \sum_{i=0}^{d} c_i x_i, \tag{6}$$

επειδή το y είναι εσωτερικό σημείο του d-simplex $\mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_d\})$. Έστω λοιπόν $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$ και έστω $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ με $\sum_{j=0}^{d} \lambda_j = 0$ τέτοια ώστε

$$\sum_{j \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} \lambda_j x_j + \lambda_i y = 0.$$

Αντικαθιστώντας το y με το ίσον του από την έκφραση (6) παίρνει κανείς την

$$\sum_{j \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} (\lambda_j + \lambda_i c_j) x_j + \lambda_i c_i x_i = 0.$$

Τώρα

$$\sum_{j \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} (\lambda_j + \lambda_i c_j) + \lambda_i c_i = \sum_{j \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} \lambda_j + \lambda_i \sum_{j \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} c_j + \lambda_i c_i = -\lambda_i + \lambda_i \sum_{j=0}^{d} c_j = -\lambda_i + \lambda_i = 0,$$

και επομένως, από την αφφινική ανεξαρτησία των $x_0, x_1, \ldots, x_d$, πρέπει

$$\lambda_j + \lambda_i c_j = 0 \quad \forall\, j \in \{0, 1, \ldots, d\} \setminus \{i\} \quad \text{και} \quad \lambda_i c_i = 0.$$

Αφού τώρα $c_i > 0$, πρέπει $\lambda_i = 0$ και κατόπιν έπεται ότι και τα υπόλοιπα λ_j πρέπει να είναι μηδέν. Αποδείχθηκε επομένως ότι τα σημεία x_i, $i \in \{0, 1, \ldots, d\} \setminus \{i\}$, και y είναι αφφινικά ανεξάρτητα, για τυχόν $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι $S_i^{\circ} \cap S_j^{\circ} = \varnothing$. Έστω ότι όχι και έστω $x \in S_i^{\circ} \cap S_j^{\circ}$. Τότε υπάρχουν $a_0, a_1, \ldots, a_d$ και $b_0, b_1, \ldots, b_d$ στο $(0,1)$, με $\sum_{k=0}^{d} a_k = \sum_{k=0}^{d} b_k = 1$, τέτοια ώστε

$$x = \sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} a_k x_k + a_i y = \sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{j\}} b_k x_k + b_j y\cdot$$

τα a_k και b_k είναι > 0 επειδή το x είναι εσωτερικό σημείο των d-simplices S_i και S_j. Η δεύτερη ισότητα, αυτή μεταξύ των δύο κυρτών συνδυασμών, είναι ισοδύναμη με την

$$\sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i,j\}} (a_k - b_k) x_k + a_j x_j - b_i x_i + (a_i - b_j) y = 0,$$

και αντικαθιστώντας το y με το ίσον του από την (6), αυτό γίνεται

$$\sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i,j\}} (a_k - b_k) x_k + a_j x_j - b_i x_i + (a_i - b_j) \sum_{k=0}^{d} c_k x_k = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{k\in\{0,1,\ldots,d\}\smallsetminus\{i,j\}} [(a_k-b_k)+(a_i-b_j)c_k]x_k+[a_j+(a_i-b_j)c_j]x_j-[b_i-(a_i-b_j)c_i]x_i=0.$$

Για τους συντελεστές εδώ έχει κανείς ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\{0,1,\ldots,d\}\smallsetminus\{i,j\}} [(a_k-b_k)+(a_i-b_j)c_k]+a_j+(a_i-b_j)c_j-[b_i-(a_i-b_j)c_i]&\\ =\sum_{k\in\{0,1,\ldots,d\}\smallsetminus\{i\}} a_k-\sum_{k\in\{0,1,\ldots,d\}\smallsetminus\{j\}} b_k+(a_i-b_j)\sum_{k=0}^{d}c_k&\\ =\sum_{k\in\{0,1,\ldots,d\}\smallsetminus\{i\}} a_k-\sum_{k\in\{0,1,\ldots,d\}\smallsetminus\{j\}} b_k+(a_i-b_j)\cdot 1&\\ =\sum_{k=0}^{d}a_k-\sum_{k=0}^{d}b_k=1-1=0\cdot&\end{aligned}$$

αφού λοιπόν τα $x_0,x_1,\ldots,x_d$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα, πρέπει

$$\begin{aligned}&a_j+(a_i-b_j)c_j=0,\\ &b_i-(a_i-b_j)c_i=0,\\ \text{και}\quad &(a_k-b_k)+(a_i-b_j)c_k=0\quad \forall\, k\in\{0,1,\ldots,d\}\smallsetminus\{i,j\}\,.\end{aligned}$$

Από τις δύο πρώτες από αυτές όμως προκύπτει ότι

$$a_i-b_j=-\frac{a_j}{c_j}<0\qquad\text{και}\qquad a_i-b_j=\frac{b_i}{c_i}>0,$$

που φυσικά αποτελεί αντίφαση. Επομένως δεν μπορεί να υπάρχει τέτοιο x, και άρα $S_i^{\circ}\cap S_j^{\circ}=\varnothing$.

Τέλος, έχει κανείς προφανώς ότι $S_i\subseteq S\ \forall\, i\in\{0,1,\ldots,d\}$· πράγματι, κάθε ένα από τα σημεία x_j, $j\in\{0,1,\ldots,d\}\smallsetminus\{i\}$, και y ανήκουν στο S, και αφού το S είναι κυρτό πρέπει να περιέχει και την κυρτή θήκη αυτών των σημείων. Για να δείξει λοιπόν κανείς ότι $S=\bigcup_{i=0}^{d}S_i$, αρκεί να δείξει ότι κάθε $x\in S$ ανήκει σε κάποιο S_i, $i\in\{0,1,\ldots,d\}$. Έστω $x\in S$, και έστω ότι $x=\sum_{i=0}^{d}\lambda_i x_i$, με $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_d\in[0,1]$ και $\sum_{i=0}^{d}\lambda_i=1$. Αν $x\in S_i$ για κάποιο i, θα πρέπει να υπάρχουν $a_0,a_1,\ldots,a_d\in[0,1]$ τέτοια ώστε $\sum_{k=0}^{d}a_k=1$ και

$$x=\sum_{k\in\{0,1,\ldots,d\}\smallsetminus\{i\}} a_kx_k+a_iy=\sum_{k\in\{0,1,\ldots,d\}\smallsetminus\{i\}}(a_k+a_ic_k)x_k+a_ic_ix_i.$$

Τα $a_0,a_1,\ldots,a_d$ θα πρέπει επομένως να ικανοποιούν τις ισότητες

$$\lambda_i=a_ic_i\quad\text{και}\quad \lambda_k=a_k+a_ic_k\quad \forall\, k\in\{0,1,\ldots.d\}\smallsetminus\{i\}\,,$$

ή ισοδύναμα τις

$$a_i=\frac{\lambda_i}{c_i}\quad\text{και}\quad a_k=\lambda_k-a_ic_k\quad \forall\, k\in\{0,1,\ldots.d\}\smallsetminus\{i\}\,,$$

και ταυτόχρονα θα πρέπει $a_k \geqslant 0$ για κάθε k και $\sum_{k=0}^d a_k = 1$. Επιλέγουμε επομένως $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\lambda_i}{c_i} = \min_{j \in \{0,1,\ldots,d\}} \frac{\lambda_j}{c_j},$$

και θέτουμε

$$a_i := \frac{\lambda_i}{c_i} \qquad \text{και} \qquad a_k := \lambda_k - a_i c_k \quad k \in \{0, 1, \ldots, d\} \setminus \{i\} \cdot$$

τότε προφανώς $a_k \geqslant 0 \ \forall\, k \in \{0, 1, \ldots, d\}$, αφού $a_i \geqslant 0$ και

$$a_k = c_k \left(\frac{\lambda_k}{c_k} - a_i \right) = c_k \left(\frac{\lambda_k}{c_k} - \frac{\lambda_i}{c_i} \right) \geqslant 0 \qquad \forall\, k \in \{1, \ldots, d\} \setminus \{i\}$$

και

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^d a_k &= \sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} (\lambda_k - a_i c_k) + a_i \\
&= \sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} \lambda_k - a_i \sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} c_k + a_i \\
&= \sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} \lambda_k - a_i (1 - c_i) + a_i \\
&= \sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} \lambda_k + a_i c_i \\
&= \sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} \lambda_k + \lambda_i = 1,
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} a_k x_k + a_i y &= \sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} (\lambda_k - a_i c_k) x_k + a_i y \\
&= \sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} \lambda_k x_k - a_i \sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} c_k x_k + a_i y \\
&= \sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} \lambda_k x_k - a_i \sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} c_k x_k + a_i \sum_{k=0}^d c_k x_k \\
&= \sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} \lambda_k x_k + a_i c_i x_i \\
&= \sum_{k \in \{0,1,\ldots,d\} \setminus \{i\}} \lambda_k x_k + \lambda_i x_i = x.
\end{aligned}$$

Επομένως $x \in S_i$. □

9. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^d$, μη κενό. Δείξτε ότι

$$\overline{\mathrm{conv}(S)} = \bigcap \{K \subseteq \mathbb{R}^d \colon K \supseteq S,\ K \text{ κλειστό και κυρτό}\}.$$

Λύση. Έστω C το δεξιό μέλος της προς απόδειξη ισότητας:

$$C := \bigcap \left\{K \subseteq \mathbb{R}^d : K \supseteq S,\ K \text{ κλειστό και κυρτό}\right\}.$$

Αν K κυρτό και κλειστό και $S \subseteq K$, τότε $\mathrm{conv}(S) \subseteq K$ επειδή η κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(S)$ είναι το μικρότερο κυρτό που περιέχει το S (η τομή όλων των κυρτών που περιέχουν το S), και τότε $\overline{\mathrm{conv}(S)} \subseteq K$ επειδή το K είναι και κλειστό, αφού η κλειστή θήκη $\overline{\mathrm{conv}(S)}$ είναι το μικρότερο κλειστό που περιέχει το $\mathrm{conv}(S)$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε κλειστό και κυρτό K που περιέχει το S, έπεται ότι $\overline{\mathrm{conv}(S)} \subseteq C$.

Από την άλλη $\overline{\mathrm{conv}(S)}$ είναι κυρτό και κλειστό και περιέχει το S και άρα είναι στοιχείο του

$$\left\{K \subseteq \mathbb{R}^d : K \supseteq S,\ K \text{ κλειστό και κυρτό}\right\}\cdot$$

έπεται ότι $C \subseteq \overline{\mathrm{conv}(S)}$. □

10. (α) Έστω

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

ένα πολυώνυμο, με $a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Δείξτε ότι οι ρίζες της παραγώγου P' του P περιέχονται στην κυρτή θήκη των ριζών του P.

(β) Έστω $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$, και έστω $z_1, \ldots, z_4 \in \mathbb{C}$ οι ρίζες του P. Δείξτε ότι η διάμετρος του συνόλου $\{z_1, \ldots, z_4\}$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\mathrm{diam}(\{z_1, \ldots, z_4\}) \geqslant \sqrt{\left|\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3}\right|}.$$

[Υπόδειξη: Αν $z_1, \ldots, z_n$ είναι οι ρίζες του P στο (α), το P γράφεται σαν $P(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$. Υπενθυμίζεται επίσης ότι $1/\bar{z} = z/|z|^2$ για κάθε μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό z.]

Λύση. (α) Έστω $z_1, \ldots, z_n$ οι ρίζες του P. Τότε το P γράφεται σαν γινόμενο $P(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$. Παραγωγίζοντας ως προς z βρίσκει κανείς ότι

$$P'(z) = a_n \sum_{k=1}^{n} \prod_{m \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{k\}} (z - z_m),$$

και αν $z \notin \{z_1, \ldots, z_k\}$, αυτό γράφεται σαν

$$P'(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(z)}{z - z_k}. \tag{7}$$

Αν λοιπόν z είναι μία ρίζα του $P'(z)$, τότε ή $z \in \{z_1, \ldots, z_k\}$, και άρα τότε το z ανήκει στην κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(\{z_1, \ldots, z_k\})$ των ριζών του P, ή $z \notin \{z_1, \ldots, z_k\}$. Σε αυτήν την περίπτωση, η (7) δίνει ότι

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(z)}{z - z_k} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{|z - z_k|^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \sum_{k=1}^{n} z_k \lambda_k,$$

με

$$\lambda_k := \frac{|z - z_k|^{-2}}{\sum_{j=1}^{n} |z - z_j|^{-2}} \qquad k \in \{1, \ldots, n\},$$

και προφανώς $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ και $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Άρα $z \in \operatorname{conv}(\{z_1, \ldots, z_n\})$.

(β) Έστω $\{z_1, \ldots, z_4\}$ οι ρίζες του P, $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ οι ρίζες του P' και $\{w_1, w_2\}$ οι ρίζες του P''. Από το (α), $\{w_1, w_2\} \subseteq \operatorname{conv}(\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\})$ και $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\} \subseteq \operatorname{conv}(z_1, \ldots, z_4)$· αφού το $\operatorname{conv}(\{z_1, \ldots, z_4\})$ είναι κυρτό σύνολο και περιέχει τα $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ θα περιέχει και την κυρτή τους θήκη $\operatorname{conv}(\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\})$, αφού η τελευταία είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει τα $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. Έπεται τώρα ότι

$$\{w_1, w_2\} \subseteq \operatorname{conv}(\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}) \subseteq \operatorname{conv}(\{z_1, \ldots, z_4\}).$$

Από την Άσκηση 3(α),

$$\operatorname{diam}(\{z_1 \ldots, z_4\}) = \operatorname{diam}(\operatorname{conv}(\{z_1, \ldots, z_4\})) \geqslant \operatorname{diam}(\{w_1, w_2\}) = |w_1 - w_2|,$$

και απευθείας υπολογισμός δίνει ότι $P''(z) = 12z^2 + 6az + 2b$, του οποίου οι ρίζες είναι

$$w_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - \frac{8}{3}b}}{4} \quad , \quad w_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - \frac{8}{3}b}}{4},$$

οπότε

$$w_1 - w_2 = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3}}. \qquad \square$$