Κυρτή Ανάλυση
Εαρινό Εξάμηνο 2019–2020
Φυλλάδιο 1

1. Αν K κυρτό και κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, $x_1, x_2, \ldots \in K$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots = 1$, και ο άπειρος κυρτός συνδυασμός $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$, τότε $x \in K$.

Λύση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί κανείς να υποθέσει ότι $\lambda_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω

$$y_n := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \qquad n \in \mathbb{N}\cdot$$

τότε

$$\frac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} x_i \in K \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

λόγω της κυρτότητας του K, και

$$\frac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} y_n \xrightarrow{(n\to\infty)} x,$$

αφού $y_n \to x$ και $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \to \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$ καθώς $n \to \infty$. Επομένως $x \in K = K$. □

2. Έστω $S = S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d \colon \sum_{i=1}^{d} x_i^2 = 1\}$ η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι η κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(S)$ του S είναι η μοναδιαία σφαίρα

$$B_2(0,1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \colon \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Λύση. Η $B_2(0,1)$ είναι κυρτό σύνολο (Άσκηση 7), και περιέχει την επιφάνεια $S(0,1)$· επομένως $\mathrm{conv}(S(0,1)) \subseteq B_2(0,1)$. Από την άλλη, κάθε σημείο της $B_2(0,1)$ είναι κυρτός συνδυασμός δύο (το πολύ) σημείων της $S(0,1)$: αν $x \in B_2(0,1) \setminus \{0_d\}$, τότε $\pm \|x\|_2^{-1} x \in S(0,1)$, και

$$x = \frac{\|x\|_2 + 1}{2} \left(\frac{x}{\|x\|_2} \right) + \left(1 - \frac{\|x\|_2 + 1}{2} \right) \left(-\frac{x}{\|x\|_2} \right),$$

και αν πάλι $x = 0_d$, τότε $x = \frac{1}{2}\mathrm{e}_1 + \frac{1}{2}(-\mathrm{e}_1)$ (για παράδειγμα), όπου $\mathrm{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Επομένως ισχύει και ότι $B_2(0,1) \subseteq \mathrm{conv}(S(0,1))$. □

3. Έστω $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_d$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{conv}\{\pm\mathrm{e}_1, \ldots, \pm\mathrm{e}_d\} = B_1(0,1),$$

όπου $B_1(0,1) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \colon \sum_{i=1}^{d} |x_i| \leqslant 1 \right\}$.

Λύση. Το $B_1(0,1)$ είναι κυρτό σύνολο (Άσκηση 7), και περιέχει το $\{\pm\mathrm{e}_1, \ldots, \pm\mathrm{e}_d\}$· άρα $\mathrm{conv}\{\pm\mathrm{e}_1, \ldots, \pm\mathrm{e}_d\} \subseteq B_1(0,1)$. Από την άλλη, κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, και άρα κάθε $x \in B_1(0,1)$, γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της βάσης: $x = \sum_{i=1}^{d} x_i \mathrm{e}_i$· αν θέσει κανείς

$$\begin{array}{lllll} x_i^+ := x_i & \text{και} & x_i^- = 0 & \text{αν} & x_i > 0 \\ x_i^+ := 0 & \text{και} & x_i^- = -x_i & \text{αν} & x_i < 0, \end{array}$$

και $x_i^+ = x_i^- = 0$ αν $x_i = 0$, τότε $x_i^\pm \geqslant 0$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, d\}$, και

$$x = x_1^+ \mathrm{e}_1 + \cdots + x_d^+ \mathrm{e}_d + x_1^-(-\mathrm{e}_1) + \cdots + x_d^-(-\mathrm{e}_d),$$

με τους συντελεστές $x_i^\pm$ να αθροίζουν σε

$$\sum_{i=1}^d x_i^+ + \sum_{i=1}^d x_i^- = \sum_{i=1}^d |x_i|,$$

το οποίο είναι $\leqslant 1$ για $x \in B_1(0,1)$. Χρησιμοποιώντας και το μηδενικό διάνυσμα 0, ένα $x \in B_1(0,1)$ γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός των $0, \pm\mathrm{e}_1, \ldots, \pm\mathrm{e}_d$:

$$x_1^+ \mathrm{e}_1 + \cdots + x_d^+ \mathrm{e}_d + x_1^-(-\mathrm{e}_1) + \cdots + x_d^-(-\mathrm{e}_d) + \left(1 - \sum_{i=1}^d |x_i|\right) \cdot 0.$$

Επειδή όμως το μηδενικό διάνυσμα είναι κυρτός συνδυασμός των $\pm\mathrm{e}_1, \ldots, \pm\mathrm{e}_d$, κατά πολλούς μάλιστα τρόπους, έπεται ότι κάθε $x \in B_1(0,1)$ γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός των $\pm\mathrm{e}_1, \ldots, \pm\mathrm{e}_d$: π.χ.

$$x = (x_1^+ + c)\mathrm{e}_1 + \cdots + (x_d^+ + c)\mathrm{e}_d + (x_1^- + c)(-\mathrm{e}_1) + \cdots + (x_d^- + c)(-\mathrm{e}_d),$$

με $c := \left(1 - \sum_{i=1}^d |x_i|\right)/(2d)$· πράγματι, παρατηρεί κανείς ότι $c \geqslant 0$, αν $x \in B_1(0,1)$, και άρα $x_i^\pm + c \geqslant 0$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, d\}$, και

$$(x_1^+ + c) + \cdots + (x_d^+ + c) + (x_1^- + c) + \cdots + (x_d^- + c) = \sum_{i=1}^d x_i^+ + \sum_{i=1}^d x_i^- + \left(1 - \sum_{i=1}^d |x_i|\right) = 1.$$

Επομένως ισχύει και ότι $B_1(0,1) \subseteq \mathrm{conv}\{\pm\mathrm{e}_1, \ldots, \pm\mathrm{e}_d\}$. $\square$

4. Για μία συνάρτηση $f\colon K \to \mathbb{R}$, όπου $K \subseteq \mathbb{R}^d$, το επιγράφημα της f ορίζεται ως $\mathrm{epi}(f) := \{(x,t) \in K \times \mathbb{R} : f(x) \leqslant t\}$. Δείξτε ότι το K είναι κυρτό σύνολο και η f κυρτή συνάρτηση ανν $\mathrm{epi}(f)$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d+1}$.

Λύση. Έστω πρώτα ότι το K είναι κυρτό και η $f\colon K \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή. Έστω $(x,t), (y,s) \in \mathrm{epi}(f)$ και $\lambda \in [0,1]$· τότε $t \geqslant f(x)$ και $s \geqslant f(y)$.

$$\lambda(x,t) + (1-\lambda)(y,s) = (\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda t + (1-\lambda)s),$$

και $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$ επειδή $x, y \in K$ και K κυρτό, και

$$\lambda t + (1-\lambda)s \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geqslant f(\lambda x + (1-\lambda)y),$$

από την κυρτότητα της f. Άρα

$$\lambda(x,t) + (1-\lambda)(y,s) = (\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda t + (1-\lambda)s) \in \mathrm{epi}(f).$$

Αντίστροφα, έστω ότι το $\mathrm{epi}(f)$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d+1}$. Αν $x, y \in K$ και $\lambda \in [0,1]$, τότε $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \mathrm{epi}(f)$, και άρα

$$(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) = \lambda(x,t) + (1-\lambda)(y,s) \in \mathrm{epi}(f)\cdot \tag{$*$}$$

έπεται ότι $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$, εξ ορισμού του $\mathrm{epi}(f)$ και άρα το K είναι κυρτό. Επίσης, αν γράψει κανείς $t = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, τότε από την $(*)$ έπεται ότι $t \geqslant f(\lambda x + (1-\lambda)y)$, αφού $(\lambda x + (1-\lambda)y, t) \in \mathrm{epi}(f)$· άρα

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = t \geqslant f(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

και άρα η f είναι επίσης κυρτή. □

5. Έστω $f\colon K \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, όπου K κυρτό μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι αν $x_0 \in K$ είναι τοπικό ελάχιστο της f, τότε είναι και ολικό ελάχιστο.

Λύση. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \leqslant f(x)\ \forall\, x \in K \cap B_2(x_0, \varepsilon)$. Έστω τώρα ότι το x_0 δεν είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f· τότε υπάρχει $x \in K$ τέτοιο ώστε $f(x) < f(x_0)$. Για $\lambda \in (0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x_0) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x_0) < \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x_0) = f(x_0)\cdot$$

επομένως υπάρχει λ τέτοιο ώστε

$$\lambda x + (1-\lambda)x_0 \in K \cap B_2(x_0, \varepsilon) \quad \text{και} \quad f(\lambda x + (1-\lambda)x_0) < f(x_0)\cdot$$

αρκεί να πάρει κανείς $\lambda > 0$ και αρκούντως μικρό, και συγκεκριμένα

$$\lambda < \frac{\varepsilon}{\|x - x_0\|_2}.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, από την επιλογή του ε. □

6. Έστω $f\colon K \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, όπου K κυρτό μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι αν η f έχει μέγιστο στο K τότε είναι σταθερή.

Λύση. Έστω $x_0 \in K$ σημείο μεγίστου της f. Αν η f δεν είναι σταθερή, υπάρχει $x \in K$ με $f(x) < f(x_0)$. Τότε,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x_0) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x_0) < \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x) = f(x_0), \tag{1}$$

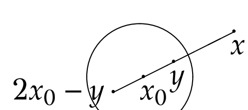
για κάθε $\lambda \in (0, 1]$. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B_2(x_0, \varepsilon) \subseteq K$. Τότε

$$\lambda x + (1-\lambda)x_0 \in B_2(x_0, \varepsilon)$$

για $\lambda > 0$ αρκούντως μικρό, και συγκεκριμένα για $\lambda < \varepsilon/\|x - x_0\|_2$. Έστω $y := \lambda x + (1-\lambda)x_0$ για ένα τέτοιο λ. Τότε $2x_0 - y = x_0 - (y - x_0)$ ανήκει επίσης στην σφαίρα $B_2(x_0, \varepsilon)$, και $x_0 = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(2x_0 - y)$· επομένως πρέπει

$$f(x_0) \leqslant \tfrac{1}{2}f(y) + \tfrac{1}{2}f(2x_0 - y) \leqslant \tfrac{1}{2}f(y) + \tfrac{1}{2}f(x_0) < f(x_0),$$

η πρώτη ανισότητα επειδή η f είναι κυρτή, η δεύτερη επειδή η f έχει μέγιστο στο x_0 και άρα $f(x_0) \geqslant f(2x_0 - y)$, και η τρίτη επειδή $f(y) < f(x_0)$, από την (1). Αυτό φυσικά αποτελεί αντίφαση και άρα δεν υπάρχει $x \in K$ με $f(x) < f(x_0)$.



□

7. Για $p \in (0, +\infty)$, ορίζουμε

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in \mathbb{R}^d).$$

Επίσης ορίζουμε

$$\|x\|_\infty := \max_{i \in \{1,\ldots,d\}} |x_i| \qquad (x \in \mathbb{R}^d).$$

(i) Δείξτε ότι για $p \in [1, +\infty]$, η $x \mapsto \|x\|_p$ είναι νόρμα.
(ii) Για $p \in [1, +\infty]$, οι μοναδιαίες σφαίρες $B_p(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_p \leqslant 1\}$ είναι κυρτά σύνολα.
(iii) Είναι οι $x \mapsto \|x\|_p$ νόρμες για $p \in (0,1)$;
[Υπόδειξη: Είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες σφαίρες $B_p(0,1)$ κυρτές για $p \in (0,1)$;]
(iv) Δείξτε ότι για $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$,

$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_p \leqslant d^{1/p - 1/q} \|x\|_q \qquad (x \in \mathbb{R}^d).$$

Λύση. (i) Έστω πρώτα $p < +\infty$. Προφανώς $\|x\|_p \geqslant 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, και αν $\|x\|_p = 0$, τότε $\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p = 0$, οπότε πρέπει $|x_i|^p = 0$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, d\}$· δηλαδή πρέπει $x_i = 0$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, d\}$, που σημαίνει ότι πρέπει $x = 0$ (το μηδενικό διάνυσμα). Επίσης, για $c \in \mathbb{R}$,

$$\|cx\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |cx_i|^p \right)^{1/p} = |c| \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p} = |c|\|c\|_p.$$

Τέλος, για $p \in [1, \infty)$ και $x, y \in \mathbb{R}^d$, η τριγωνική ανισότητα $\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$ είναι η ανισότητα Minkowski που αποδείχθηκε στην τάξη.

Για $p = \infty$, προφανώς και πάλι $\|x\|_\infty \geqslant 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, και αν $\|x\|_\infty = 0$, τότε $|x_i| = 0$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, d\}$· δηλαδή πρέπει $x_i = 0$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, d\}$, που σημαίνει ότι πρέπει $x = 0$ (το μηδενικό διάνυσμα). Επίσης,

$$\|cx\|_\infty = \max_{i \in \{1,\ldots,d\}} |cx_i| = \max_{i \in \{1,\ldots,d\}} |c||x_i| = |c| \max_{i \in \{1,\ldots,d\}} |x_i| = |c|\|x\|_\infty,$$

και τέλος η τριγωνική ανισότητα για την νόρμα έπεται από την τριγωνική ανισότητα για την απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών:

$$|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant \max_{j \in \{1,\ldots,d\}} |x_j| + \max_{k \in \{1,\ldots,d\}} |y_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

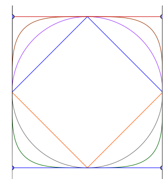
για κάθε $i \in \{1, \ldots, d\}$, οπότε

$$\|x + y\|_\infty = \max_{i \in \{1,\ldots,d\}} |x_i + y_i| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

(ii) Έστω $p \in [1, +\infty]$ και $x, y \in B_p(0,1)$. Τότε

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\|_p \leqslant \|\lambda x\|_p + \|(1-\lambda) y\|_p = \lambda \|x\|_p + (1-\lambda)\|y\|_p \leqslant \lambda + (1-\lambda) = 1$$

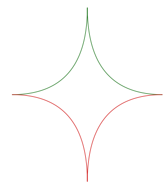
για $\lambda \in [0,1]$, και άρα $\lambda x + (1-\lambda) y \in B_p(0,1)$. Έπεται ότι η $B_p(0,1)$ είναι κυρτό σύνολο. (Το σχήμα δείχνει τα $B_p(0,1)$ διαδοχικά για $p = 1, 2, 4, \infty$, από μέσα προς τα έξω· $B_\infty(0,1)$ είναι το εξωτερικό τετράγωνο.)



(iii) Για $d = 2$, δηλαδή στις δύο διαστάσεις, η σφαίρα $B_p(0,1)$ φράσσεται από τις καμπύλες

$$y = \pm (1 - |x|^p)^{1/p} \qquad\qquad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

και για $p \in (0,1)$ δεν είναι κυρτό σύνολο. (Το σχήμα δείχνει την περίπτωση $d = 2, p = 0.5$.)



Η $x \mapsto \|x\|_p$ δεν ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα για $p \in (0,1)$. Πράγματι, αν $x := (1,0,\ldots,0)$ και $y := (0,1,\ldots,0)$ τότε $\|x+y\|_p = 2^{1/p}$ ενώ $\|x\|_p + \|y\|_p = 1 + 1 = 2$, και για $p \in (0,1)$, $2^{1/p} > 2$. Αυτό δείχνει ότι και η σφαίρα $B_p(0,1)$ δεν είναι κυρτό σύνολο για $p \in (0,1)$: για x, y όπως στην προηγούμενη πρόταση, έχουμε ότι $x, y \in B_p(0,1)$, αλλά $\frac{1}{2}(x+y) \notin B_p(0,1)$, αφού $\|\frac{1}{2}(x+y)\| = 2^{1/p-1}$ το οποίο είναι > 1 όταν $p \in (0,1)$.
(iv) Έστω πρώτα $x \in \mathbb{R}^d$ με $\|x\|_p = 1$. Τότε $\sum_{i=1}^d |x_i|^p = 1$ και άρα $|x_i| \leqslant 1$ για κάθε $i \in \{1,\ldots,d\}$. Επομένως, αν $q > p$, τότε $|x_i|^q \leqslant |x_i|^p$ για κάθε $i \in \{1,\ldots,d\}$, και άρα $\sum_{i=1}^d |x_i|^q \leqslant \sum_{i=1}^d |x_i|^p = 1$· έπεται ότι

$$\|x\|_q = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^q\right)^{1/q} \leqslant 1 = \|x\|_p.$$

Για την γενική περίπτωση, εφαρμόζει κανείς τα παραπάνω για το $y := x/\|x\|_p$, που έχει $\|y\|_p = 1$, οπότε παίρνει ότι $\|y\|_q \leqslant 1$· αυτό όμως ισοδυναμεί με την ανισότητα

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_p} \right\|_q \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\|x\|_q}{\|x\|_p} \leqslant 1.$$

Για την δεξιά ανισότητα, θεωρεί κανείς την συνάρτηση $\varphi(x) := x^{q/p}$ για $x \in [0,\infty)$. Η συνάρτηση αυτή είναι κυρτή όταν $p > q$ ($\varphi''(x) > 0$ για $x > 0$). Από την ανισότητα Jensen έπεται ότι

$$\varphi\left(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right) \leqslant \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d \varphi(|x_i|^p) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right)^{q/p} \leqslant \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d |x_i|^q\cdot$$

η ζητούμενη ανισότητα προκύπτει αν υψώσει κανείς και τα δύο μέλη της τελευταίας ανισότητας στην δύναμη $1/q$ και κατόπιν πολλαπλασιάσει και τα δύο μέλη με $d^{1/p}$. $\square$

8. (Η ανισότητα Hölder.)
(α) (Εκδοχή για το ολοκλήρωμα Riemann.) Αν $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένες και ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις, και αν $p,q>1$ με $p^{-1}+q^{-1}=1$, τότε

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

(β) (Εκδοχή για το ολοκλήρωμα ως προς κάποιο μέτρο.) Αν $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $f,g\colon X\to\mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις, και αν $p,q>1$ ικανοποιούν την $p^{-1}+q^{-1}=1$, τότε $\int_X |fg|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\left(\int_X |g|^q\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}$.

Λύση. (α) Αφού οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, έπεται ότι και οι $fg, |f|^p, |g|^q$ είναι ολοκληρώσιμες (βλ. «Ολοκλήρωμα Riemann», Απειροστικός Λογισμός ΙΙ). Υποθέτουμε πρώτα ότι $\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\neq 0$ και $\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\neq 0$, και θέτουμε

$$F(x) := \frac{f(x)}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}} \qquad \text{και} \qquad G(x) := \frac{g(x)}{\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}}.$$

Από την ανισότητα Young, που αποδείχθηκε στην τάξη, έπεται ότι

$$|F(x)G(x)| \leqslant \frac{|F(x)|^p}{p} + \frac{|G(x)|^q}{q} \qquad \forall\, x\in[a,b],$$

και άρα

$$\int_a^b |F(x)G(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{p}\int_a^b |F(x)|^p\,\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_a^b |G(x)|^q\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1,$$

αφού $\int_a^b |F(x)|^p\,\mathrm{d}x = \int_a^b |G(x)|^q\,\mathrm{d}x = 1$. Αυτή η ανισότητα όμως είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left|\frac{f(x)}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}}\right|\left|\frac{g(x)}{\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}}\right|\mathrm{d}x \leqslant 1\\
\Leftrightarrow\quad &\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q},
\end{aligned}$$

και η $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x$ δίνει τώρα την ζητούμενη ανισότητα.

Έστω τώρα ότι $\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x = 0$· τότε επειδή

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{x\in[a,b]}|g(x)|\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

αρκεί να δείξει κανείς ότι $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας την ανισότητα Jensen για ολοκληρώματα. Η συνάρτηση $\varphi\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$ με $\varphi(x) := x^p$ είναι κυρτή για $p \geqslant 1$· επομένως έχει ευθεία στήριξης σε κάθε σημείο $x \in (0, \infty)$, αλλά και στο $x = 0$: την $y = 0$. Έστω

$$x_0 := \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

και $y = u(x - x_0) + \varphi(x_0)$ η ευθεία στήριξης της φ στο x_0· τότε

$$\varphi(x) \geqslant u(x - x_0) + \varphi(x_0) \qquad \forall\, x \in [0, \infty),$$

και άρα και

$$\varphi(|f(x)|) \geqslant u(|f(x)| - x_0) + \varphi(x_0) \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

Έπεται ότι

$$\int_a^b \varphi(|f(x)|)\,\mathrm{d}x \geqslant u \int_a^b (|f(x)| - x_0)\mathrm{d}x + (b-a)\varphi(x_0) = u \cdot 0 + (b-a)\varphi(x_0),$$

που δείχνει ότι

$$\left(\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \right)^p \leqslant (b-a)^{p-1} \int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x.$$

Από αυτό τώρα έπεται ότι $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$ αν $\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x = 0$. Όμοια αν $\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x = 0$.
(β) Εντελώς όμοια, πλην της περίπτωσης όπου $\int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu = 0$ ή $\int_X |g|^q\,\mathrm{d}\mu = 0$, που τώρα έπεται άμεσα: αν $\int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu = 0$ τότε πρέπει $f(x) = 0$ για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$, και επομένως $\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu = 0$ (και όμοια για την g). □

9. Η συνάρτηση Γ ορίζεται για $x > 0$ από την $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
(i) Δείξτε ότι το $\Gamma(x)$ είναι καλά ορισμένο για $x > 0$.
(ii) $\Gamma(1) = 1$.
(iii) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ για $n \in \mathbb{N}$.
(iv) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ για $x > 0$.
(v) Η συνάρτηση Γ είναι λογαριθμικά κυρτή, δηλαδή η $x \mapsto \ln\Gamma(x)$ είναι κυρτή.
[Υπόδειξη: Μία συνάρτηση $f\colon K \to (0, +\infty)$ είναι λογαριθμικά κυρτή ανν

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda} \qquad x, y \in K,\ \lambda \in [0, 1].]$$

(vi) Η συνάρτηση Γ είναι κυρτή.

Λύση. (i) Αν θεωρεί κανείς το ολοκλήρωμα Lebesgue στον ορισμό της Γ, τότε η αιτιολόγηση είναι: το ολοκλήρωμα υπάρχει γιατί η συνάρτηση που ολοκληρώνεται είναι μη αρνητική. Για να δει κανείς επιπλέον ότι το ολοκλήρωμα ορίζει πεπερασμένο αριθμό, και άρα η Γ ορίζει μια πραγματική (θετική) συνάρτηση, επιχειρηματολογεί ως εξής. Η συνάρτηση $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$, $t \in (0, \infty)$, για $x > 0$ σταθερό, είναι θετική και για $t \geqslant 1$ κυριαρχείται από την $t \mapsto n_x! 2^{n_x} \mathrm{e}^{-t/2}$ (ας πούμε), όπου $n_x := \lfloor x \rfloor$ το ακέραιο μέρος του x, δηλαδή ο μοναδικός μη αρνητικός ακέραιος για τον οποίο $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$· αυτό επειδή $\mathrm{e}^{t/2} = \sum_{n=0}^\infty t^n/(2^n n!)$, και άρα, για $t > 0$, $t^n/(2^n n!) < \mathrm{e}^{t/2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, και επομένως

$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leqslant t^{n_x}\mathrm{e}^{-t} \leqslant n_x! 2^{n_x} \mathrm{e}^{-t/2},$$

όταν $t \geqslant 1$. Επίσης για $t \in (0,1)$, η $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ κυριαρχείται από την $t \mapsto t^{x-1}$. Έπεται ότι

$$\int_{(0,\infty)} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{(0,1)} t^{x-1}\,\mathrm{d}t + 2^{n_x} n_x! \int_{[1,\infty)} \mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} + \frac{2^{n_x+1} n_x!}{\sqrt{\mathrm{e}}} < +\infty.$$

Αν θεωρεί κανείς το ολοκλήρωμα Riemann στον ορισμό της Γ η αιτιολόγηση του 'καλά ορισμένη' είναι ως εξής. Για οποιοδήποτε πεπερασμένο διάστημα $[a,b]$, το ολοκλήρωμα $\int_a^b t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ είναι καλά ορισμένο γιατί η ολοκληρούμενη ποσότητα είναι συνεχής συνάρτηση του t. Μένει λοιπόν να δείξει κανείς ότι υπάρχει το όριο αυτών των ολοκληρωμάτων καθώς $a \downarrow 0$ και $b \uparrow +\infty$. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί κανείς τις κυριαρχήσεις της προηγούμενης παραγράφου για να συμπεράνει ότι, για $1 < b < b'$,

$$\int_b^{b'} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant 2^{n_x} n_x! \int_b^{b'} \mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t = 2^{n_x+1} n_x! \left(\mathrm{e}^{-b'/2} - \mathrm{e}^{-b'/2}\right) \xrightarrow{b,b'\uparrow+\infty} 0,$$

και, για $0 < a < a'$,

$$\int_a^{a'} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{a'} t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{(a')^x - a^x}{x} \xrightarrow{a,a'\downarrow 0} 0,$$

για $x > 0$.

(ii)

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

(iii) Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνει κανείς ότι

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{\substack{a\downarrow 0\\ b\uparrow+\infty}} \int_a^b t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\substack{a\downarrow 0\\ b\uparrow+\infty}} \int_a^b t^n (-\mathrm{e}^{-t})'\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\substack{a\downarrow 0\\ b\uparrow+\infty}} \left[-b^n\mathrm{e}^{-b} + a^n\mathrm{e}^{-a} - \int_a^b (t^n)'(-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t\right] \\
&= -0 + 0 + \lim_{\substack{a\downarrow 0\\ b\uparrow+\infty}} \int_a^b n t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= n\int_0^\infty t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= n\Gamma(n),
\end{aligned}$$

για $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Όμοια με (iii).

(v) Από την υπόδειξη, αρκεί να δείξει κανείς ότι

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant [\Gamma(x)]^\lambda [\Gamma(y)]^{1-\lambda} \qquad \forall\, x,y \in (0,\infty)\ \lambda \in (0,1)$$

(για $\lambda \in \{0,1\}$ η ανισότητα ανάγεται σε τετριμμένη ανισότητα που ισχύει πάντα, ούτως ή άλλως). Το αριστερό μέλος της παραπάνω ανισότητας είναι

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \int_0^\infty t^{\lambda x + (1-\lambda)y - 1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty t^{\lambda(x-1)+(1-\lambda)(y-1)} \mathrm{e}^{-\lambda t - (1-\lambda)t}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty (t^{x-1}\mathrm{e}^{-t})^\lambda (t^{y-1}\mathrm{e}^{-t})^{1-\lambda}\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Hölder με $p = 1/\lambda$ και $q = 1/(1-\lambda)$,

$$\int_{[0,\infty)} (t^{x-1}\mathrm{e}^{-t})^\lambda (t^{y-1}\mathrm{e}^{-t})^{1-\lambda}\, \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_{[0,\infty)} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t\right)^\lambda \left(\int_{[0,\infty)} t^{y-1}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t\right)^{1-\lambda}$$

αν θεωρεί κανείς το ολοκλήρωμα Lebesgue στον ορισμό της Γ, το οποίο δείχνει ακριβώς ότι

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant [\Gamma(x)]^\lambda [\Gamma(y)]^{1-\lambda}.$$

Αν θεωρεί κανείς το ολοκλήρωμα Riemann στον ορισμό της Γ, τότε, για οποιοδήποτε πεπερασμένο διάστημα $[a,b]$, έχει κανείς από την ανισότητα Hölder με $p = 1/\lambda$ και $q = 1/(1-\lambda)$ ότι

$$\int_a^b (t^{x-1}\mathrm{e}^{-t})^\lambda (t^{y-1}\mathrm{e}^{-t})^{1-\lambda}\, \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t\right)^\lambda \left(\int_a^b t^{y-1}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t\right)^{1-\lambda}.$$

παίρνοντας όρια καθώς $a \downarrow 0$ και $b \uparrow +\infty$, παίρνει κανείς και πάλι ότι

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \int_0^\infty (t^{x-1}\mathrm{e}^{-t})^\lambda (t^{y-1}\mathrm{e}^{-t})^{1-\lambda}\, \mathrm{d}t \\ &= \lim_{\substack{a\downarrow 0\\ b\uparrow+\infty}} \int_a^b (t^{x-1}\mathrm{e}^{-t})^\lambda (t^{y-1}\mathrm{e}^{-t})^{1-\lambda}\, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \lim_{\substack{a\downarrow 0\\ b\uparrow+\infty}} \left(\int_a^b t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t\right)^\lambda \left(\int_a^b t^{y-1}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t\right)^{1-\lambda} \\ &= \left(\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t\right)^\lambda \left(\int_a^b t^{y-1}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t\right)^{1-\lambda} \\ &= [\Gamma(x)]^\lambda [\Gamma(y)]^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

(vi) **Λήμμα.** *Αν $f\colon I \to \mathbb{R}$ και $g\colon J \to \mathbb{R}$ είναι κυρτές και η f είναι επιπλέον αύξουσα, τότε $f \circ g$ είναι κυρτή. Εδώ τα $I, J \subseteq \mathbb{R}$ είναι διαστήματα στον $\mathbb{R}$, και $g(J) \subseteq I$.*

Απόδειξη. Αν $x, y \in J$ και $\lambda \in [0,1]$, τότε

$$g(\lambda x + (1-\lambda y)) \leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y),$$

και επειδή η f είναι αύξουσα,

$$f(g(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leqslant f(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y))\cdot$$

από την κυρτότητα της f τώρα

$$f(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)) \leqslant \lambda f(g(x)) + (1-\lambda)f(g(y)). \qquad \square$$

Η συνάρτηση $f(x) := \mathrm{e}^x$ είναι αύξουσα και κυρτή, αφού $(d^k f/dx^k)(x) = \mathrm{e}^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{N}$. Αφού από το (v), η συνάρτηση $g(x) := \ln \mathit{\Gamma}(x)$ είναι κυρτή, έπεται από το Λήμμα ότι η $\mathit{\Gamma} = f \circ g$ είναι κυρτή. $\square$