Κυρτή Ανάλυση (2015–2016) — Φυλλάδιο 4

1. Έστω K μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι αν

$$\|p_K(x) - p_K(y)\|_2 = \|x - y\|_2 \tag{1}$$

για κάποια $x, y \in \mathbb{R}^d$, τότε $x - p_K(x) = y - p_K(y)$. Αν η (1) ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$, τι συμπεραίνει κανείς για το K;

2. (α) Περιγράψτε όλα τα κλειστά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ που το συμπλήρωμά τους είναι επίσης κυρτό.

   (β) Περιγράψτε όλα τα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ που δεν έχουν κανένα υπερεπίπεδο στήριξης.

3. (α) Υπάρχει παράδειγμα ξένων, μη κενών, κυρτών και κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ που δεν διαχωρίζονται γνήσια;

   (β) Υπάρχει παράδειγμα ξένων, μη κενών, κυρτών και κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ που διαχωρίζονται γνήσια αλλά όχι αυστηρά;

4. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό, κλειστό και κυρτό, και έστω $f\colon \mathbb{R}^d \to [0, +\infty)$ η συνάρτηση $f(x) := \mathrm{dist}(x, K)$, όπου $\mathrm{dist}(x, K) := \inf\{\|x - y\|_2 \colon y \in K\}$.
(α) Δείξτε ότι

$$\nabla f(x) = \frac{x - p_K(x)}{\|x - p_K(x)\|_2} \qquad \text{για } x \in \mathbb{R}^d \setminus K.$$

(β) Δείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^d \setminus K$.

5. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό κυρτό σύνολο. Δείξτε ότι $\mathrm{ext}(K) \subseteq \mathrm{rb}(K)$, όπου, υπενθυμίζεται ότι, $\mathrm{rb}(K) = \bar{K} \setminus \mathrm{ri}(K)$ είναι το σχετικό σύνορο του K.

6. Αν $K \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κυρτό και συμπαγές με μη κενό εσωτερικό, τότε το σύνορο του K δεν μπορεί να είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.
[Υπόδειξη: Θεώρημα Minkowski.]

7. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό. Αν $S \subseteq K$ και $\mathrm{conv}(S) = K$, τότε $\mathrm{ext}(K) \subseteq S$. (Δηλαδή, στην περίπτωση που το K είναι και συμπαγές, το $\mathrm{ext}(K)$ είναι το μικρότερο υποσύνολο του K του οποίου η κυρτή θήκη είναι το K).
[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον χαρακτηρισμό $x \in \mathrm{ext}(K)$ ανν $K \setminus \{x\}$ είναι κυρτό, για $x \in K$.]

8. (Συνέχεια Άσκησης 1 1ου Φυλλαδίου) Αν K κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, $x_1, x_2, \ldots \in K$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots = 1$, και ο άπειρος κυρτός συνδυασμός $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$, τότε $x \in K$.
[Υπόδειξη: Υπερεπίπεδα στήριξης. Θεωρείστε πρώτα την περίπτωση που η αφφινική θήκη $\mathrm{aff}(\{x_1, x_2, \ldots\})$ των x_n, $n \in \mathbb{N}$, έχει διάσταση d.]

9. Το πολικό ενός μη κενού συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι το σύνολο

$$A^{\circ} := \{y \in \mathbb{R}^d \colon \langle x, y \rangle \leqslant 1 \ \forall x \in A\}.$$

(α) Δείξτε ότι το πολικό ενός πολυτόπου $P = \mathrm{conv}(\{v_1, \dots, v_n\})$ στον $\mathbb{R}^d$ είναι το πολύεδρο

$$P^{\circ} = \bigcap_{i=1}^{n} \{y \in \mathbb{R}^d \colon \langle y, v_i \rangle \leqslant 1\}.$$

(β) Δείξτε ότι το πολικό ενός πολυέδρου $\mathit{\Pi} = \bigcap_{i=1}^{n} \{y \in \mathbb{R}^d \colon \langle y, v_i \rangle \leqslant 1\}$ στον $\mathbb{R}^d$, όπου $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$, είναι το πολύτοπο $\mathit{\Pi}^{\circ} = \mathrm{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})$.
[Υπόδειξη: $A^{\circ\circ} := (A^{\circ})^{\circ} = \overline{\mathrm{conv}(A \cup \{0\})}$ για οποιοδήποτε μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}^d$.]