|| $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό + κλειστό $\dim K = d$
- $K=-K \Rightarrow g_K$ ημινόρμα
- $K=$σώμα $+ K=-K \Rightarrow g_K$ νόρμα.

Μ-19 Σχέση $f=$ Θ.Ο + υποπροσθετική με κυρτό + κλειστό $K \subseteq \mathbb{R}^d$

Χρειαζόμαστε:

1) $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ κυρτή $\Rightarrow f$ συνεχής
2) $f, g \geq 0$ f: Θ.Ο. + κυρτή και $\{x : f(x)=1\} = \{x : g(x)=1\} \Rightarrow f=g$
3) f κυρτή $u_0 \in \mathbb{R}^d$ $\partial f(u_0) \neq \emptyset$ $\exists x_0 \in \mathbb{R}^d$ $f(u) \geq \varphi(u_0) + x_0(u-u_0)$ $u \in \mathbb{R}^d$

- Αν f Θ.Ο. + κυρτή, $u_0 \in \mathbb{R}^d$ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$: $f(u_0) = \langle x_0, u_0 \rangle$ και $f(u) \geq \langle x_0, u \rangle$, $u \in \mathbb{R}^d$

4) Αν $K=$ κυρτό $0 \in \text{εσ}K$ $0<\lambda<1 \Rightarrow \lambda K \subseteq \text{εσ}K$
5) $K=$ κυρτό, $\text{εσ}K \neq \emptyset \Rightarrow \overline{K} = \overline{\text{εσ}K}$
6) $\lambda, \mu > 0$, K κυρτό $\Rightarrow \lambda K + \mu K = (\lambda+\mu)K$.
7) $x_0 \notin K =$ κλειστό + κυρτό $\Rightarrow x_0, K$ διαχωρίζονται.

(I) $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Θ.Ο. κυρτή $K_f = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq 1\}$ Τότε:

(i) $K_f \neq \emptyset$ κυρτό + κλειστό.

(ii) $\text{εσ}K_f = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < 1\}$, $0 \in \text{εσ}K_f$

(iii) $f \geq 0 \Rightarrow f(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K_f\}$ ($f \geq 0$ ορ. inf ii Άτοπο)

Ιδιαιτέρως: f ημινόρμα $K_f = -K_f$ και $f(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K_f\}$

(iv) $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \Rightarrow K_f$ φραγμένο

Ιδιαιτέρως: Αν f νόρμα $\Rightarrow K_f$ συμμ. σώμα

Απόδειξη:

(iv) Έστω ότι το K_f δεν είναι φραγμένο $\Rightarrow$
$\exists \|x_n\| \geq n$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad x_n / \|x_n\| \in \text{bd}\, B(0,1) =$ συμπαγές
$\exists x_{k_n}/\|x_{k_n}\| \to y_0 \in \text{bd}B(0,1) \Rightarrow \|y_0\| = 1$
$f =$ συνεχής $f\left(\frac{x_{k_n}}{\|x_{k_n}\|}\right) \to f(y_0) > 0$

οπότε $f\left(\frac{x_{k_n}}{\|x_{k_n}\|}\right) = f(x_{k_n})/\|x_{k_n}\| \le f(x_{k_n})/k_n \le 1/k_n \to 0$

Άτοπο $\Rightarrow$ K_f φραγμένο.

— $A\neq\emptyset$ $g_A(x)=\inf\{\lambda>0 : x\in\lambda A\}\in[0,+\infty]$ Συναρτησοειδές Minkowski ή Συν. Στάθμης του A.

II) K κυρτό + κλειστό, $0\in \text{εσ}K$ Τότε:

(i) $g_K(x)\in[0,+\infty)$ Θ.Ο. + κυρτή.

Έστω $x,y\in\mathbb{R}^d$, $\lambda_0,\mu_0>0$: $x\in\lambda_0 K$, $y\in\mu_0 K$

$x+y\in\lambda_0K+\mu_0K \overset{\text{κυρτό}}{=} (\lambda_0+\mu_0)K$ $\quad g_K(x+y)\le\lambda_0+\mu_0 \Rightarrow$

$g_K(x+y)\le g_K(x)+g_K(y)$.

(ii) $\text{εσ}K=\{x : g_K(x)<1\}\subseteq\{x : g_K(x)\le 1\}=K$

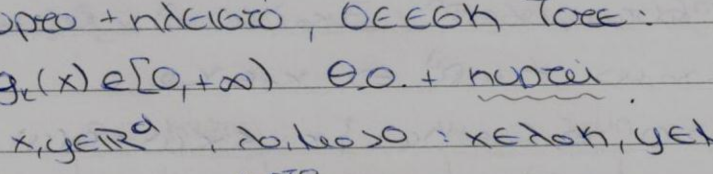
(iii) Αν K φραγμένο $\Rightarrow g_K(x)>0$, $x\neq 0$.

Απόδειξη:

(iii) $x_0\in\mathbb{R}^d$: $g_K(x_0)=0$ $\quad \lambda>0$ $\quad g_K(\lambda x_0)=0<1 \overset{(ii)}{\Rightarrow} \lambda x_0\in K$

Άρα $x_0=0$.

Σ1



$K_f=\{x : f(x)\le 1\}$

$g_K(x)=\inf\{\lambda>0 : x\in\lambda K\}$

$K=\{x : g_K(x)\le 1\}$

Πρόταση: $f\to K_f$ 1-1 + επί, $g_{K_f}=f$.

Σχέση φ=Θ.Ο + υποπροσθετική με κυρτό + συμπαγές $K\subseteq\mathbb{R}^d$

I) $\varphi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ Θ.Ο. + κυρτή

$K_\varphi=\{x\in\mathbb{R}^d : \langle x,u\rangle\le\varphi(u)\ \forall u\in\mathbb{R}^d\}$ Τότε:

(i) K_φ κυρτό + συμπαγές, $K\neq\emptyset$

$\langle \cdot, u\rangle$ γραμμ. $\Rightarrow K_\varphi$ = κυρτό.

$\langle \cdot, u\rangle$ = συνεχής $\Rightarrow K_\varphi$ = κλειστό

K_φ φραγμένο: Έστω $x\in K_\varphi$ $\langle x,u\rangle \le \varphi(u)$ $\forall u\in\mathbb{R}^d$

$x=\sum_{i=1}^{d} x_i e_i$, $u=e_j$ $x_j\le\varphi(e_j)$

$u=-e_j$ $\langle x,-e_j\rangle = -x_j \le \varphi(-e_j)$

Άρα $-\varphi(-e_j)\le x_j\le \varphi(e_j)$, $j=1,\dots,d$.

$K_\varphi\neq\emptyset$: Έστω $u_0\in\mathbb{R}^d$ $\exists x_0\in\partial\varphi(u_0)$: $\varphi(u_0)=\langle x_0,u_0\rangle$

$\varphi(u)\ge\langle x_0,u\rangle$ $\forall u\in\mathbb{R}^d \Rightarrow x_0\in K_\varphi$

(ii) $\varphi\ge 0 \Rightarrow 0\in K_\varphi=\{x:\langle x,u\rangle\le\varphi(u)\ \forall u\in\mathbb{R}^d\}$

Ιδιαιτέρως: φ = ημινόρμα $\Rightarrow K_\varphi$ (και συμμετρικό)

$\varphi(x)>0$ $x\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\} \Rightarrow 0\in$ εσ K_φ

Ιδιαιτέρως: φ = νόρμα $\Rightarrow K_\varphi$ συμμ. κυρτό σώμα.

$\begin{cases} \varphi \text{ συνεχής} \Rightarrow \exists u_0 \text{ με } \|u_0\|=1\ 0<\varphi(u_0)\le\varphi(u)\ \forall u\in\mathbb{R}^d: \|u\|=1 \\ \text{bd}\,B(0,1) = \text{συμπ.} \end{cases}$

Έστω $u\neq 0$ $\varphi(u_0)\frac{u}{\|u\|}\in \text{bd}\,B(0,\varphi(u_0))$

$v\neq 0$

$\langle \varphi(u_0)\frac{u}{\|u\|}, v\rangle \overset{C-S}{\le} \varphi(u_0)\|v\| \le \varphi\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\cdot\|v\| = \varphi(v)$

$v\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\} \Longrightarrow$

$\varphi(u_0)\frac{u}{\|u\|}\in K_\varphi$. Άρα $\text{bd}\,B(0,\varphi(u_0))\subseteq K_\varphi$ = κυρτό $\Rightarrow$

$B(0,\varphi(u_0))\subseteq K_\varphi \Rightarrow 0\in$ εσ K_φ

Συνάρτηση Στήριξης / Φέρουσα συνάρτηση Συνόλο

$A\neq\emptyset$ $h_A(u)=\sup\{\langle a,u\rangle: a\in A\}\in(-\infty,+\infty]$

- $h_A(0)=0$
- $h_A=h_{\bar{A}}=h_{\text{conv}A}$, & $h_{\lambda A}=\lambda h_A$, $\lambda>0$

Άσκηση: K, L κυρτά + συμπαγή $\neq\emptyset$ τότε

(i) $h_K(u)\in\mathbb{R}$, $\exists x_u\in\text{bd}K$: $h_K(x_u)=\langle x_u,u\rangle$, $u\neq 0$.

(ii) $H\left(\frac{u}{\|u\|}, h_K\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right)$ υπερεπίπεδο στήριξης

(ii) $h_{K+L} = h_K + h_L$

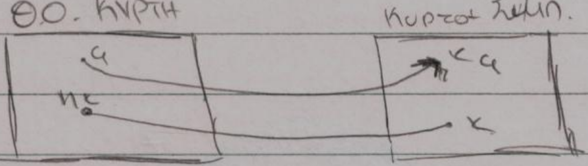
(iii) $K = L \Leftrightarrow h_K = h_L$ (διαχωριστικό)

II K κυρτό + συμπαγές $h_K(u) = \max\{\langle x, u\rangle : x \in K\}$

(i) h_K Θ.Ο. + (κυρτή) υποπροσθετική.

$K = \{x : \langle x, u\rangle \leq h_K(u) \ \forall u \in \mathbb{R}^d\}$ (διαχωριστικό Θ.)

Σα



$K_\varphi = \{x : \langle x, u\rangle \leq \varphi(u) \ \forall u \in \mathbb{R}^d\}$

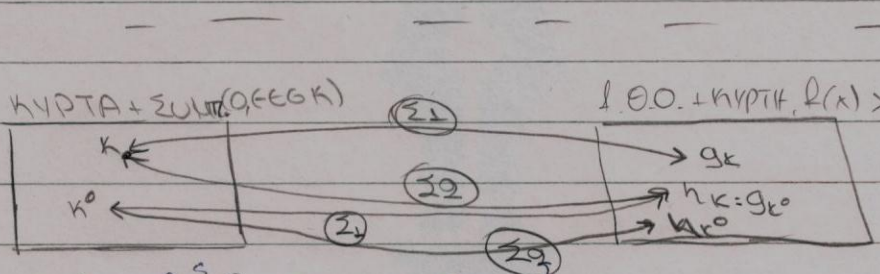
$h_K(u) = \max\{\langle x, u\rangle : x \in K\}$ $K = \{x : \langle x, u\rangle \leq h_K(u)\}$.

Πρόταση: $\varphi \to K_\varphi$ 1-1, επί $h_{K_\varphi} = \varphi$.

Πόρισμα: K συμμετρικό σώμα $\Rightarrow$ h_K = νόρμα.

Τέλος ύλης 2ου Προόδου

— — — — — — —



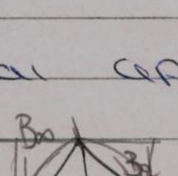
$g_K(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$

$K^o = \{u : h_K(u) \leq 1\} = \{u : \langle x, u\rangle \leq 1, x \in K\}$ ⇝ πολικό σύνολο

$K = (K^o)^o$ ⇝ Διπολικό θεώρημα

Κάθε πολύτοπο είναι φραγμένο πολύεδρο.

$\mathbb{R}^d$, $\|\cdot\|_p$ $1 \leq p \leq +\infty$



$B_p^o(0,1) = B_q(0,1)$

όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

και $\mathring{B}_1(0,1) = B_\infty(0,1)$

$K = K^\circ \Leftrightarrow K = B_2(0,1)$