M-17

(ii) Ανάλογο (Θ. Αυσ. Διαχ).

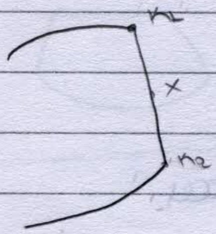
Ακραία Σημεία:

Ορισμός: Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό + κλειστό και $x \in K$. Το x είναι ακραίο σημείο του K αν $x=(1-\lambda)y+\lambda z$, $\lambda\in(0,1)$, $y,z\in K$ τότε $x=y=z$

Ασκήσεις:

(1) Έστω $K\subseteq\mathbb{R}^2$, $\dim K=2$ κυρτό + συμπαγές Δ.Ο. το σύνολο των ακραίων σημείων του K είναι κλειστό.

[Συμβολισμός: $ext(K)=\{$σύνολο των ακραίων σημείων του $K\}$



Έστω $(x_n)\subseteq ext K$ $x_n\to x\in K$

$ext(K)\subseteq bdK$ είναι κλειστό

$(x_n)\subseteq bdK$ άρα $x\in bdK$.

Έστω $x\notin ext K \Rightarrow \exists \varepsilon>0$ $A=S(x,\varepsilon)\cap[k_1,k_2]\subseteq[k_1,k_2]$

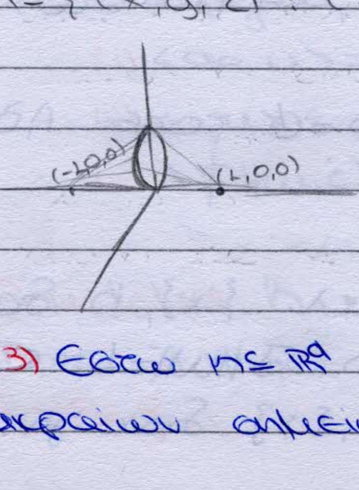
Αφού $x_n\to x$ $(x_n)\subseteq bdK$ $\exists n_1\in\mathbb{N}$: $\forall n\geq n_1$ $x_n\in A$

$x_n=(1-\lambda_n)k_1+\lambda_n k_2$, $\lambda_n\in(0,1)$ Άτοπο άρα $x\in ext K$.

Άρα ext κλειστό

(2) Να δοθεί παράδειγμα $K\subseteq\mathbb{R}^3$, $\dim K=3$, με K κυρτό και συμπαγές: $ext K$ δεν είναι κλειστό

$A=\{(x,y,z): \overset{x=0 \text{ και}}{(z-1)^2+y^2=1}\}\cup\{(-1,0,0),(1,0,0)\}$



Θεωρώ το $B=conv A$.

Το B είναι συμπαγές και κυρτό

$ext B = A\setminus\{(0,0,0)\}$.

(3) Έστω $K\subseteq\mathbb{R}^d$ κυρτό + συμπαγές το σύνολο των ακραίων σημείων είναι G_δ-σύνολο.

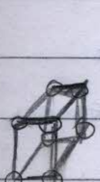
$\mathrm{ext}\,K$ G_δ $\Leftrightarrow$ $K\setminus \mathrm{ext}\,K$ είναι F_σ όμως $K\setminus \mathrm{ext}\,K =$
$\{x\in\mathbb{R}^d : x=\frac{y+z}{2},\ y,z\in K : \|y-z\|>0\} =$
$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}^d : x=\frac{y+z}{2},\ y,z\in K : \|y-z\|\geq 1/n\}$

Έστω $m\in\mathbb{N}$ τότε έχω $F_m=\{x\in\mathbb{R}^d : x=\frac{y+z}{2},\ y,z\in K$
$\|y-z\|\geq 1/m\}$

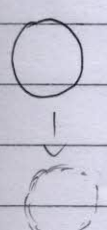
Έστω $(x_n)\subseteq F_m$, $x_n\to x\in K$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $x_n=\frac{y_n+z_n}{2}$, $y_n,z_n\in K$ και
$\|y_n-z_n\|\geq 1/m$

$y_n,z_n\in K$ συμπαγές άρα $\exists (k_n)$: $y_{k_n}\to y_0$, $z_{k_n}\to z_0$
και $x_{k_n}\to x_0$ $\Longrightarrow$ $x_0=\frac{y_0+z_0}{2}$ και $\|y_0-z_0\|\geq 1/m$

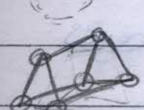
Άρα $x_0\in F_m$ άρα F_m κλειστό $\Rightarrow$ $K\setminus\mathrm{ext}\,K$ είναι F_σ
άρα $\mathrm{ext}\,K$ είναι G_δ.



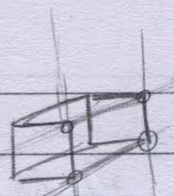
SOS (4) K κυρτό Τότε $x_0\in\mathrm{ext}\,K \Leftrightarrow K\setminus\{x_0\}$ κυρτό



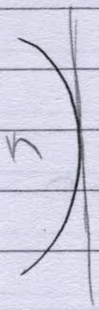
[$\Rightarrow$] Έστω $x_0\in\mathrm{ext}\,K$ τότε $\forall x,y\in K$ και $x_0\in[x,y]\Rightarrow$
$x_0=x$ ή $x_0=y$ Έστω $x_1,x_2\in K\setminus\{x_0\}$ και $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]:\lambda_1+\lambda_2=1$
Έστω $y=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\in K$
Αν $y\neq x_0$ ✓
Αν $y=x_0\Rightarrow x_0=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\Rightarrow x_0\in[x_1,x_2]\Rightarrow x_0=x_1$ ή
$x_0=x_2$ άτοπο αφού $x_1,x_2\in K\setminus\{x_0\}$.



Άρα $y\neq x_0\Rightarrow y\in K\setminus\{x_0\}\Rightarrow K\setminus\{x_0\}$ κυρτό.
[$\Leftarrow$] Έστω ότι $K\setminus\{x_0\}$ είναι κυρτό Έστω ότι
$\exists x,y\in K$: $x_0\in(x,y)\Longrightarrow\exists\lambda\in(0,1)$:
$x_0=\lambda x+(1-\lambda)y$ και $x,y\in K\setminus\{x_0\}$ $\overset{K\setminus\{x_0\}\ \text{κυρτό}}{\Longrightarrow}$ $x_0\in K\setminus\{x_0\}$
Άτοπο. Άρα το x_0 είναι ακραίο σημείο.
(5) K κλειστό + κυρτό και $x_0\in\partial K$ θεωρούμε
$F=H(u,c)\cap K$ όπου $H(u,c)$ είναι το φέρον υπερεπίπεδο
στήριξης του K στο x_0. Τότε $\mathrm{ext}\,F\subseteq\mathrm{ext}\,K$.



Έστω $x_0 \in ext F$ τότε (αν $x, y \in F$ και $x_0 \in [x,y]$) $\Rightarrow$
$x_0 = x$ ή $x_0 = y$. Έστω προς άτοπο ότι $x_0 \notin ext K$
Τότε $\exists\, x_1, x_2 \in K^{x_1 \neq x_2}$ και $\lambda \in (0,1)$ και $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$.



Ισχυρισμός: $x_1, x_2 \in F$.
Αφού $x_0 \in ext F \subseteq F = H(u,c) \cap K$ τότε $\langle x_0, u \rangle = c \Rightarrow$
$\langle \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, u \rangle = c \Rightarrow \lambda \langle x_1, u \rangle + (1-\lambda) \langle x_2, u \rangle = c$ (1)
Αφού $x_1, x_2 \in K \Rightarrow \langle x_1, u \rangle \leq c$ και $\langle x_2, u \rangle \leq c$ και
(1) $\Rightarrow \langle x_1, u \rangle = \langle x_2, u \rangle = c \Rightarrow x_1, x_2 \in H(u,c)$ και
$x_1, x_2 \in K \Rightarrow x_1, x_2 \in F$
Τότε $x_0 \in (x_1, x_2)$ και $x_0 \in ext F$ άτοπο.
Συνεπώς $ext F \subseteq ext K$.

Θεώρημα Minkowski (1911): Έστω K κυρτό+συμπαγές, $\dim K = d$. Τότε:

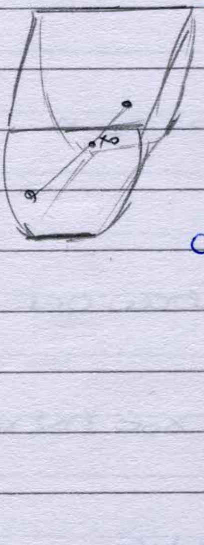
(i) $K = conv(ext K)$.

(ii) Εάν $A \subseteq K$ και $K = conv A$ τότε $ext K \subseteq A$

Δηλαδή το σύνολο των ακραίων σημείων είναι το "πιο μικρό" σύνολο που παράγει το K

Απόδειξη:

(i) Επαγωγή στην $\dim K$.



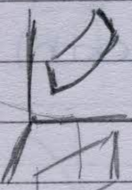
$d=0$ $K = \{x_0\} = conv\{x_0\}$, $\{x_0\} = ext K$.
$d=1$ $K = [a,b] = conv(ext K)$ $ext K = \{a,b\}$, $a \neq b$.
Υποθέτουμε ότι ισχύει: αν F κυρτό+συμπαγές $0 \leq \dim F \leq d$ τότε $F = conv(ext F)$
Έστω $K = κ+σ$ και $\dim K = d+1$
Έστω $x_0 \in K$ $x_0 \in bd K$ ή $x_0 \in K^{\circ}$
Έστω ότι $x_0 \in bd K$ τότε $H(u,c)$ φέρον υπερεπίπεδο του K στο x_0.
Θεωρούμε $F = K \cap H(u,c) \neq \emptyset$ αφού $x_0 \in F$. και F κυρτό+συμπαγές και $\dim F \leq d$. (ε.υ.) $F = conv(ext F) \subseteq conv(ext K) \Rightarrow x_0 \in conv(ext K)$.

Αν $x_0 \in K^\circ$ ℓ_{x_0} τυχαία ευθεία που περνά από το x_0
$x_0 \in K \cap \ell_{x_0} = [x_1, x_2]$: $x_1, x_2 \in \partial K \Rightarrow x_1 \in con(ext K)$, $x_2 \in con(ext K)$
$\Rightarrow x_0 \in [x_1, x_2] \subseteq con(ext K) \Rightarrow x_0 \in con(ext K) \Rightarrow$
$K = con(ext K)$.

(ii) $A \subseteq K$ $conA = K$ Έστω $ext K \not\subseteq A$.
Τότε $\exists x_0 \in ext K$, $x_0 \notin A$
$K = conA = con(A \setminus \{x_0\}) \subseteq con(K \setminus \{x_0\}) = K \setminus \{x_0\}$ αφού $x_0 \in$
$ext K$. (ασκ: 4) $\Rightarrow x_0 \in K \setminus \{x_0\}$ άτοπο.

Συνέπεια: Αν X = τ. κυρτός, Τ2 δ.χ. (πχ X = Hilbert, X = με νόρμα), K κυρτό και συμπαγές. Τότε:
(i) $ext K \neq \emptyset$ (Zorn)
(ii) $K = con(ext K)$

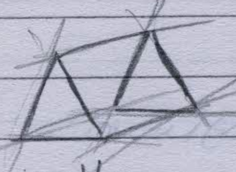
Ασκήσεις (όχι στις εξετάσεις):
(1) Έστω $(X, \|\cdot\|)$, $A \subseteq X$, A ολικά φραγμένο.
Τότε $conA$ είναι ολικά φραγμένο.
(2) K κυρτό + συμπαγές
(i) Αν $\dim K = d \Rightarrow con(ext K)$ συμπαγές.
(ii) Αν $\dim K = +\infty \Rightarrow con(ext K)$ ολικά φραγμένο.
Να δοθεί παράδειγμα όπου $con(ext K)$ δεν είναι συμπαγές.
(3) $B(0,1)$ του $c_0 = \{(x_n)_n : \lim x_n = 0\}$ με
$\|(x_n)_n\| = \max |x_n|$ δεν έχει ακραία σημεία
(4) Δ.ο. η $B(0,1)$ του $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής$\}$.
$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} \{|f(x)|\}$ έχει μόνο 2-ακραία σημεία
$f(x) = 1$, $g(x) = -1$, $x \in [0,1]$.

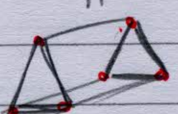


Ασκησεις (Συνεχεια):

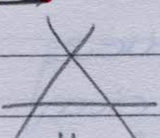
(6) Εστω $f: K \to \mathbb{R}$, $K \subseteq \mathbb{R}^d$ $K =$ κυρτο + συμπαγες, f κυρτή + συν.
Τοτε $\exists x_0 \in ext K$ ωστε $f(x_0) = \max_{x \in K} f(x)$
Αφου f συνεχης $f(K)$ συμπαγες. Τοτε $\exists x_0 \in K$ ωστε $f(x_0) = \max_{x \in K} f(x)$ Ομως K κυρτο + συμπ. αρα απο Θ. Minkowski $\Rightarrow K = conv\, ext K$ Αρα $x_0 \in conv\, ext K$. Συνεπως $x_0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ $\lambda_i \in (0,1)$ $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $x_i \in conv\, ext K$ $\forall i = 1, \dots, k$.
$M = f(x_0) = f(\sum \lambda_i x_i) \le \sum \lambda_i f(x_i) \le \sum \lambda_i M = M$.
Τελικα $f(x_i) = M$ $\forall i = 1, \dots, k$.

(8) Εστω $P = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u_i \le c_i\}$ $u_i \in \mathbb{R}^n$, $c_i \in \mathbb{R}$, $P \neq \emptyset$ φραγ.
Τοτε $P =$ πολυτοπο.
[Πολυτοπο στον $\mathbb{R}^n$ ειναι η κυρτη θήκη ενος πεπερασμενου συνολου S μεσα στον $\mathbb{R}^n$
$K = conv S = conv\{x_1, \dots, x_\nu\}$
Πολυεδρο ειναι η πεπερασμενη τομη κλειστων ημιχωρων.]



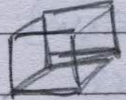


Λημμα: Εστω πολυεδρο $P = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u_i \le c_i\}$
Για καθε $y \in P$ οριζω $I(y) = \{i \le m : y \cdot u_i = c_i\}$
Το $y \in ext P \Leftrightarrow$ Το συνολο $\{u_i : i \in I(y)\}$ παραγει τον $\mathbb{R}^n$
Ειδικοτερα αν $y \in ext P$ $|I(y)| \ge n$.



Αποδειξη:

[$\Leftarrow$] Εστω $y \in P$ και το συνολο $\{u_i : i \in I(y)\}$ παραγει τον $\mathbb{R}^n$. Εστω οτι $y = (1-t)y_1 + t y_2$, $y_1, y_2 \in P$, $0 < t < 1$ Για $i \in I(y)$ $\langle y, u_i \rangle = c_i = (1-t)\langle y_1, u_i \rangle + t \langle y_2, u_i \rangle \le (1-t) c_i + t c_i = c_i \Rightarrow$ $\langle y_1, u_i \rangle = \langle y_2, u_i \rangle = c_i$ αρα $\langle y_1 - y_2, u_i \rangle = 0 \Rightarrow$ $y_1 - y_2 \perp u_i$ αυτό όμως παραγει ~~...~~ τον $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ $y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$ Αρα y ακραιο σημειο.



[$\Rightarrow$] Εστω οτι $\{u_i : i \in I(y)\}$ δεν παραγει τον

$\mathbb{R}^n$ Εστω $z \neq 0$ $\langle z, u_i \rangle = 0$, $i \in I(y)$ Παρατηρουμε
οτι για $i \notin I(y)$ $\langle y, u_i \rangle \leq c_i$
Θεωρω $\varepsilon > 0$, και $y_1 = y + \varepsilon z$, $y_2 = y - \varepsilon z$
$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ $y_i \neq y$ $y_1, y_2 \in P$
Για το ε πρεπει να ισχυει, για $i \in I(y)$ $\langle y \pm \varepsilon z, u_i \rangle =$
$\langle y, u_i \rangle \pm \varepsilon \underbrace{\langle z, u_i \rangle}_{\to 0} = c_i$
για $i \notin I(y)$ $\langle y \pm \varepsilon z, u_i \rangle = \langle y, u_i \rangle \pm \varepsilon \langle z, u_i \rangle \leq c_i$
Αρα ε πρεπει να ειναι αρκετα μικρο ωστε $i \notin I(y)$
$\varepsilon |\langle z, u_i \rangle| < c_i - \langle y, u_i \rangle$.
Αρα $y \notin \text{ext}P$ Ατοπο. ∎
Αφου $P \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστο κ' φραγμενο $\Rightarrow$ συμπαγές.
Αφου P κυρτό $\overset{\text{Minkowski}}{\Longrightarrow}$ $P = \text{conv}\,\text{ext}P$.
Ισχυρισμός: $\exists f$ με $f: \text{ext}P \to \mathbb{R}^n$ ωστε $N(f(\text{ext}P)) < \infty$
και f 1-1.
Εστω $f: \text{ext}P \to \mathbb{R}^{n^2}$ με $f(y) = (u_{i_1}, \dots, u_{i_n})$ οπου $u_{i_1}, \dots u_{i_n}$
ειναι τα πρωτα n γρ. ανεξ. απο τα u_i $i \in I(y)$ (*)
· f καλα ορισμένη απο (*)
· f 1-1 Για $f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow (u_{i_1}, \dots u_{i_n}) = (u_{i_1}', \dots u_{i_n}')$
όμως $\langle y_1, u_i \rangle = c_i$ και $\langle y_2', u_i \rangle = c_i$ και απο μονα-
δικοτητα λυσης των συστηματων εχουμε
$y_1 = y_2$
· $N(f(\text{ext}P)) < \infty$ Προφανές.
Τελικά $N(\text{ext}P) < \infty$
Συνεπως P = πολυτοπο.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1d}x_d \leq c_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nd}x_d \leq c_n \end{array} \sim \quad Ax \leq c$$

Επεται οτι αν εχουμε $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ γραμμική τοτε
η $f|_P$ δεχεται max, min P απο ασκησεις
6 και 8.

Θετικά ομογενής κυρτή συνάρτηση - ημινόρμα - νόρμα

Συν. Στάθμης, Στήριξης

Σχέση κυρτών σωμάτων και Νορμών στον $\mathbb{R}^d$

Ορισμός: Έστω $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

(i) f θετικά ομογενής $\iff f(\lambda x)=\lambda f(x)$, $\lambda \geq 0$, $f(0)=0$

(ii) f υποπροσθετική $\iff f(x+y) \leq f(x)+f(y)$, $x,y \in \mathbb{R}^d$

(iii) f ημινόρμα $\iff \begin{cases} f \geq 0 \\ f(-x)=f(x) \\ f \text{ θ.ο.} \\ f \text{ υποπροσθετική} \end{cases}$

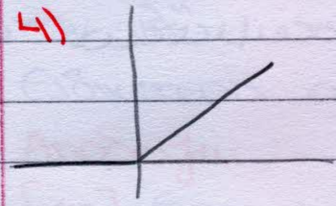
(iv) f νόρμα $\iff f$ ημινόρμα και αν $f(x_0)=0$ τότε $x_0=0$.

Παρατηρήσεις - Παραδείγματα:

1) f θ.ο. υποπρ $\iff f$ θ.ο. + κυρτή.

2) $f_1, f_2 \geq 0$, θ.ο. υποπροσθετικές τότε $f_1=f_2 \iff$
$\{x\in\mathbb{R} : f_1(x)=1\} = \{x\in\mathbb{R}^d : f_2(x)=1\}$

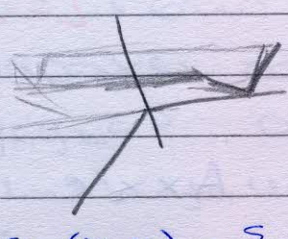
3) f ημινόρμα. $M=\{x\in\mathbb{R}^d : f(x)=0\}$ δ. υπόχωρος
f νόρμα $\iff f$ ημινόρμα και $M=\{0\}$

4) 

$f(x)=\begin{cases} 0 &, x\leq 0 \\ ax &, x\geq 0 \end{cases}$, $a>0$.

θ.ο. + κυρτή.

$g(x)=0$, $x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ ημινόρμα.



$f(x,y)=0$ ημινόρμα

$g(x,y)=|x|$

$h(x,y)=|x-y|$

$\varphi_p(x,y)=\begin{cases} (|x|^p+|y|^p)^{1/p} &, p\geq 1 \\ \max\{|x|,|y|\} &, p=+\infty \end{cases}$

5) f θ.ο + κυρτή Για κάθε $x_0\in\mathbb{R}^d$ $\exists v_0\in\mathbb{R}^d$:
$f(x_0)=\langle x_0,v_0\rangle$ και $f(x)\geq\langle x,v_0\rangle$, $x\in\mathbb{R}^d$.

Σχέση Θετικά ομογενούς + κυρτών συναρτήσεων με κυρτό + κλειστό (d-διάστατο) σύνολο.
Ιδιαιτέρως Νόρμα $\leftrightarrow$ κυρτού Συμμετρικού Σώματος

Ορισμός: Έστω $A \neq \emptyset$ $A \subseteq \mathbb{R}^d$ A συμμετρικό $\Leftrightarrow A = -A$

Ορισμός: K κυρτό σώμα $\Leftrightarrow$ K κυρτό + συμπαγές με $K^\circ \neq \emptyset$.

I) $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Θ.Ο. + κυρτή $K_f = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq 1\}$
Τότε:
(i) K_f κυρτό + κλειστό (f κυρτή συνεχής)
(ii) $K_f^\circ = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < 1\}$, $0 \in K_f^\circ$
(iii) Αν f ημινόρμα τότε K_f είναι συμμετρικό.
$K_f = -K_f$ και $f(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K_f\}$
Αν f νόρμα τότε K_f φραγμένο.

|| $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
- f ημινόρμα K_f κυρτό κλειστό συμμ. $0 \in K^\circ$
- f νόρμα K_f κυρτό + συμμ. σώμα.

Συνάρτηση Στάθμης - Συναρτησοειδές Minkowski
$A \neq \emptyset$ $g_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\} \in [0, +\infty]$

II) K κυρτό + κλειστό, $0 \in K^\circ$ Τότε
(i) $g_K : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty)$ Θ.Ο. + κυρτή. Αν $x \in \lambda K$ για κάποιο $\lambda > 0 \Rightarrow x \in \mu K$ για $\mu > \lambda$.
(ii) $K^\circ = \{x : g_K(x) < 1\} \subseteq \{x : g_K(x) \leq 1\} = K$
(iii) Αν $K = -K$ τότε g_K ημινόρμα και αν
|| $K = -K$ και φραγμένο $\Rightarrow g_K$ νόρμα.

$K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό + κλειστό + $\dim K = d$

- $K = -K \Rightarrow g_K$ ημινόρμα
- $K =$ σώμα + $K = -K \Rightarrow g_K$ νόρμα.