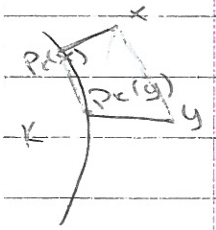
M-13 **Πόρισμα:** Έστω K κλειστό + κυρτό, $x \notin K$ και $\ell_x = \{p_K(x) + t(x - p_K(x)),\ t > 0\}$ Δ.ο. $p_K(z) = p_K(x)$ για κάθε $z \in \ell_x$

Απόδειξη:

Έστω $z \in \ell_x \Rightarrow z = p_K(x) + t(x - p_K(x)),\ t>0\}$ για $y \in K$

$\langle z - p_K(x), y - p_K(x)\rangle = \langle t(x - p_K(x)), y - p_K(x)\rangle =$

$t\langle x - p_K(x), y - p_K(x)\rangle \overset{\text{Εσο.}}{\leq} 0$



Ιδιότητες της p_K (K κλειστό + κυρτό)

1) $p_K \circ p_K = p_K$ (προβολή)

2) $\|p_K(x) - p_K(y)\|^2 \leq \langle x - y, p_K(x) - p_K(y)\rangle$, $x, y \in X$

Ιδιαιτέρως, $\|p_K(x) - p_K(y)\| \leq \|x - y\| \Rightarrow p_K$ L-συνεχής

Απόδειξη:

(2) $\langle x-y, p_K(x) - p_K(y)\rangle =$

$\langle (x - p_K(x)) + (p_K(x) - p_K(y)) + (p_K(y) - y), p_K(x) - p_K(y)\rangle$

$= -\langle x - p_K(x), p_K(y) - p_K(x)\rangle - \langle y - p_K(y), p_K(x) - p_K(y)\rangle$

$+ \|p_K(x) - p_K(y)\|^2 \geq \|p_K(x) - p_K(y)\|^2$

$\|p_K(x) - p_K(y)\|^2 \leq \langle x-y, p_K(x) - p_K(y)\rangle \leq$

$\|x-y\|\,\|p_K(x) - p_K(y)\| \Rightarrow$

$\|p_K(x) - p_K(y)\| \leq \|x - y\|$, $x, y \in X$

3) $\langle x - y, p_K(x) - p_K(y)\rangle \geq 0$

4) $\|p_K(x) - p_K(y)\|^2 + \|(x - p_K(x)) - (y - p_K(y))\|^2 \leq$

$\|x-y\|^2$, $x, y \in X$

Υπερεπίπεδα σε χώρους Hilbert

$\mathbb{R}^d$: Έστω $u \in \mathbb{R}^d$, $\|u\| = 1$ $H(u,0) = \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot u = 0\}$

διανυσματικός χώρος (κλειστός) και

$\dim H(u,0) = d-1$ και $\mathbb{R}^d = H(u,0) \oplus \langle u \rangle$.

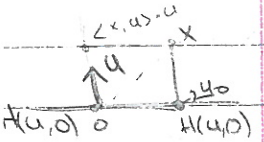
$H(u,0)$ υπερεπίπεδο συνδιάστασης 1

$H(u,c) = \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot u = c\} = x_0 + H(u,0)$, $x_0 \in H(u,c)$

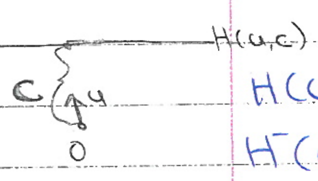
υπερεπίπεδο συνδιάστασης 1.

Ορισμός: Έστω X = χ. Hilbert, $u \in X$ $\|u\|=1$
Τότε $H(u,0)=\{x\in X : x\cdot u=0\}$ (κλ.) δ. υπόχωρος
$X=H(u,0)\oplus\langle u\rangle$ συνδιάστασης 1

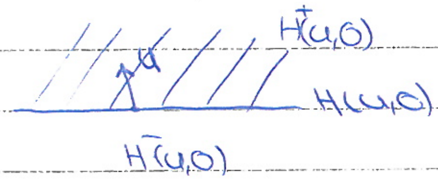
Άσκηση: Έστω $x\in X$, $d(x,H(u,c))=|\langle x,u\rangle-c|=\|x-p_c(x)\|$. Ιδιαιτέρως $d(0,H(u,c))=|c|$



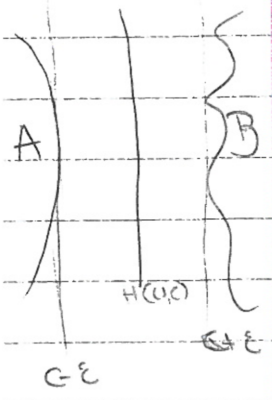
• $c=0$ Έστω $y\in H(u,0) \Rightarrow \langle y,u\rangle=0$
$|\langle x,u\rangle|=|\langle x-y,u\rangle|\le\|x-y\|$
$d(x,H(u,0))\ge|\langle x,u\rangle|$
$y_0=x-\langle x,u\rangle u$
$\|x-y_0\|=|\langle x,y\rangle|$
$d(x,H(u,0))=|\langle x,u\rangle|$
• $c\in\mathbb{R}$, $x_0\in H(u,c)\Rightarrow\langle x_0,u\rangle=c$
$H(u,c)=x_0+H(u,c)$
$d(x,H(u,c))=d(x-x_0,H(u,c)-x_0)=|\langle x-x_0,u\rangle|=|\langle x,u\rangle-c|$



$H^+(u,0)=\{x\in X : \langle x,u\rangle\ge 0\}$
$H^-(u,0)=\{x\in X : \langle x,u\rangle\le 0\}$

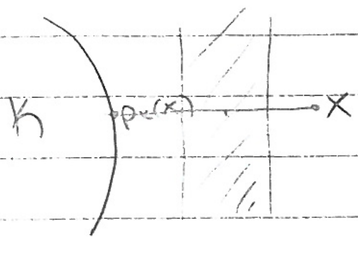


Αυστηρός Διαχωρισμός:
Έστω $A,B\subseteq X$ X = χ. Hilbert



$H(u,c)$ διαχωρίζει αυστηρά τα $A,B \Leftrightarrow \exists\varepsilon>0$:
$\langle a,u\rangle\le c-\varepsilon<c+\varepsilon\le\langle b,u\rangle$, $a\in A$, $b\in B$
(ή $\langle b,u\rangle\le c-\varepsilon<c+\varepsilon\le\langle a,u\rangle$, $a\in A$, $b\in B$) $\Leftrightarrow$
$B\subseteq H^-(u,c-\varepsilon)$ και $A\subseteq H^+(u,c+\varepsilon)$

Ξέρουμε ότι αν X = χ. Hilbert, K = κλ + κυρ
$x\notin K$.



Βλέπουμε ότι τα $\{x\}$, K διαχωρίζονται αυστηρά.

$A, B \neq \emptyset$ κυρτά , $A \cap B = \emptyset$

$A \cap B = \emptyset \iff 0 \notin A - B$.

Λήμμα: Έστω $A, B \subseteq X$, $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ ΤΑΕΙ

(i) Τα A, B διαχωρίζονται αυστηρά

(ii) $0, A-B$ διαχωρίζονται αυστηρά

Απόδειξη:

(i)$\Rightarrow$(ii) $\exists\, u \in X : \|u\| = 1,\ c \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0 :$

$\langle a, u\rangle \leq c - \varepsilon \leq c + \varepsilon \leq \langle b, u\rangle$, $a \in A$, $b \in B$.

$\langle a - b, u\rangle \leq (c - \varepsilon) - (c + \varepsilon) = -2\varepsilon$ *

$c_0 = -\varepsilon$

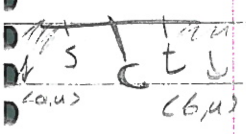
$* = c_0 - \varepsilon < c_0 + \varepsilon = 0 \leq \langle 0, u\rangle$

$\langle a - b, u\rangle \leq c_0 - \varepsilon < c_0 + \varepsilon \leq \langle 0, u\rangle \Rightarrow$

0, $A-B$ διαχωρίζονται αυστηρά.

(ii)$\Rightarrow$(i) $\sup\limits_{a-b \in A-B} \langle a - b, u\rangle < \langle 0, u\rangle = 0$

$t - s \geq 2\varepsilon$



$\varepsilon > 0$ $\langle a - b, u\rangle \leq -2\varepsilon < 0$, $a - b \in A - B$

$\langle a, u\rangle \leq \langle b, u\rangle - 2\varepsilon$, $a \in A$, $b \in B$

$\Rightarrow s = \sup\limits_{a \in A} \langle a, u\rangle \leq \inf\limits_{b \in B} \langle b, u\rangle - 2\varepsilon = t - 2\varepsilon$

$c = \dfrac{s+t}{2}$ $\langle a, u\rangle \leq c - \varepsilon < c + \varepsilon \leq \langle b, u\rangle$, $a \in A$,

$b \in B$.

Θεώρημα 1: Έστω X = χ. Hilbert, K = κλειστό και κυρτό, $x \notin K$ τότε τα $\{x\}$, K διαχωρίζονται αυστηρά.

Αναλυτικά εάν $u = \dfrac{x - p_K(x)}{\|x - p_K(x)\|}$ τότε

$\max\limits_{y \in K} \langle y, u\rangle = \langle p_K(x), u\rangle < \langle x, u\rangle$ Για $c \in (\langle p_K(x), u\rangle, \langle x, u\rangle)$ $H(u, c)$ διαχωρίζει αυστηρά τα $\{x\}$, K.

Απόδειξη:

$\langle y,u\rangle = \langle p_K(x),u\rangle = \langle y-p_K(x), x-p_K(x)\rangle \frac{1}{\|x-p_K(x)\|}$

$\leq 0 \Rightarrow \langle y,u\rangle \leq \langle p_K(x),u\rangle \quad \forall y\in K$

$y=p_K(x)\in K$

$\langle p_K(x),u\rangle = \langle p_K(x), \frac{x-p_K(x)}{\|x-p_K(x)\|}\rangle$

Άρα $\max_{y\in K} \langle y,u\rangle = \langle p_K(x),u\rangle$

$\langle x-p_K(x),u\rangle = \langle x,u\rangle - \langle p_K(x),u\rangle =$

$\langle x-p_K(x), \frac{x-p_K(x)}{\|x-p_K(x)\|}\rangle = \frac{\|x-p_K(x)\|^2}{\|x-p_K(x)\|} = d(x,K)>0$

Θεώρημα 2: Έστω A κυρτό + συμπαγές, B = κυρτό + κλειστό, $A,B\neq\emptyset$, $A\cap B=\emptyset$, $A,B\subseteq X$ = χ.Η τότε διαχωρίζονται αυστηρά.

Απόδειξη:

$A\cap B\neq\emptyset \Rightarrow 0\notin A-B$

A,B κυρτά $\Rightarrow$ A−B κυρτό

A−B κλειστό $\Rightarrow$

Άρα 0, A−B διαχ. αυστηρά $\overset{\text{λήμμα}}{\Longrightarrow}$

A,B διαχ. αυστηρά.