M-11

Παράδειγμα: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$, A συμπαγές. Τότε $\text{conv} A$ είναι συμπαγές.

Ιδιαιτέρως: $P = \text{conv}\{a_1, \dots, a_n\}$ πολύτοπο, P = συμπαγές

Απόδειξη:

α' τρόπος Έστω χβγ $\dim A = d$, $B = \{(t_1, \dots, t_d) : \sum t_i = 1, t_i \geq 0\}$ συμπαγές.

$A^{d+1} = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{d+1 \text{ φορές}}$ συμπαγές

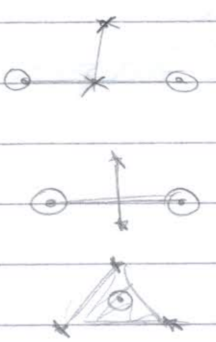
$T : B \times A^{d+1} \to \mathbb{R}^d$

$T((t_1, \dots, t_{d+1}), (x_1, \dots, x_{d+1})) =: \sum_{i=1}^{d+1} t_i x_i$

$$\left.\begin{array}{l} T(B \times A^{d+1}) \overset{\Theta K}{=} \text{conv} A \\ T \text{ συνεχής}, \ B \times A^{d+1} \text{ συμπαγές} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{conv} A \text{ συμπαγές}$$

β' τρόπος Έστω $y_n \in \text{conv} A$, $y_n \to y_0 \in \mathbb{R}^d$

ΘΚ ... Θ B-W



Θεώρημα Radon: Έστω $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$, $m \geq d+2$. Τότε $\exists$ μη κενά, ξένα $B, \Gamma \subseteq A$: $A = B \cup \Gamma$ και $\text{conv} B \cap \text{conv} \Gamma \neq \emptyset$

Απόδειξη:

$m \geq d+2$ $\{x_1, \dots, x_m\}$ αφ. εξαρτημένα

$\exists \lambda_i$ όχι όλα μηδέν: $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0$, $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0$

$\Delta = \{1, 2, \dots, m\}$

$\Delta^+ = \{i \in \Delta : \lambda_i > 0\} \neq \emptyset$

$\Delta^- = \{i \in \Delta : \lambda_i \leq 0\} \neq \emptyset$

χβγ $\Delta^+ = \{1, 2, \dots, \nu\}$

$\Delta^- = \{\nu+1, \dots, m\}$

$\lambda = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i > 0$

$\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i + \sum_{i=\nu+1}^{m} \lambda_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=\nu+1}^{m} (-\lambda_i) = \lambda$

$B = \{x_1, \dots, x_\nu\}$, $\Gamma = \{x_{\nu+1}, \dots, x_m\}$

$$\sum_{i=1}^{\nu} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i + \sum_{i=\nu+1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i = 0$$

$y_0 = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i = \sum_{i=\nu+1}^{m} \frac{-\lambda_i}{\lambda} x_i \quad , i=1,\dots,\nu \quad \frac{\lambda_i}{\lambda} > 0 . \quad \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$

για $i = \nu+1 \dots m \quad . \frac{-\lambda_i}{\lambda} \geq 0 \quad \sum_{i=\nu+1}^{m} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda} \right) = 1$

$y_0 \in \mathrm{conv} B \cap \mathrm{conv} \Gamma$

Θεώρημα Helly: Έστω $A_1, A_2, \dots A_m$, $m \geq d+1$ κυρτά. Έστω ότι τομή ανά $d+1$ αυτών είναι $\neq \emptyset$. Τότε $A_1 \cap \dots \cap A_m \neq \emptyset$.

Απόδειξη:

Εάν $m = d+1$ ισχύει

Έστω ότι είναι αληθής ο ισχυρισμός για $m \geq d+1$.

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $(m+1)$ σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$ κυρτά

$\exists x_1 \in A_2 \cap \dots \cap A_{m+1}$

$\exists x_2 \in A_1 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{m+1}$

$\vdots$

$\exists x_{m+1} \in A_1 \cap \dots \cap A_m$

— $\exists i \neq j : x_i = x_j$ πχ. $x_1 = x_2 \in A_1 \cap \dots \cap A_{m+1}$ ✓

— Έστω ότι $x_i \neq x_j \ \forall i \neq j$.

$A = \{x_1 \dots x_{m+1}\} \quad (m+1) \geq d+2$

Από Θ. Radon $B = \{x_1 \dots x_\nu\}$, $\Gamma = \{x_{\nu+1}, \dots x_{m+1}\}$.

$\mathrm{conv} B \cap \mathrm{conv} \Gamma \neq \emptyset$

$B \subseteq A_{\nu+1} \cap \dots \cap A_{m+1}$ = κυρτό

$\Gamma \subseteq A_1 \cap \dots \cap A_\nu$ = κυρτό

$\emptyset = \mathrm{conv} B \cap \mathrm{conv} \Gamma \subseteq A_1 \cap \dots \cap A_\nu \cap \dots \cap A_{m+1}$

Άρα $A_1 \cap \dots \cap A_{m+1} \neq \emptyset$

Ασκήσεις

1) $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$ Σ/Λ

i) $A^\circ \neq \emptyset$

(ii) $A^\circ \neq \emptyset$, $a \in A^\circ$, $b \in A \Rightarrow [a,b) \subseteq A^\circ$

(iii) $\overline{A} = \overline{A^\circ}$

(iv) $A^\circ = (\overline{A})^\circ$

(v) $bd\,\overline{A} = bd\,A^\circ$

2) $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό Δ.ο.

(i) $ri\,K$, $\overline{K}$ κυρτό

(ii) $\overline{K} = \overline{ri\,K}$

(iii) $ri\,K = ri(\overline{K})$

(iv) $rb\,K = rb\,\overline{K} = rb(ri\,K)$

3) (i) K_1, K_2 κυρτά, $ri\,K_1 \cap ri\,K_2 \neq \emptyset \Rightarrow$

$ri(K_1 \cap K_2) = ri\,K_1 \cap ri\,K_2$

(ii) $\{K_i : i \in I\}$, K_i κυρτά $\bigcap_{i\in I} ri\,K_i \neq \emptyset \Rightarrow$

$\bigcap_{i\in I} K_i = \bigcap_{i\in I} \overline{K_i}$

4) K κυρτό

(i) $x_0 \in ri\,K \Leftrightarrow \forall x \in K \setminus \{x_0\}\ \exists \mu > 1 : (1-\mu)x + \mu x_0 \in K$

(ii) $P = conv\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$

$ri\,P = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : \sum \lambda_i = 1, \lambda_i > 0\}$

5) (i) $A \neq \emptyset$ $A \subseteq \mathbb{R}^d$

A φραγμένο $\Leftrightarrow$ conv A φρ.

diam A = diam(conv A)

(ii) $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + \gamma z + \delta$. $P(z_i) = 0$, $i = 1, \dots 4$

Δ.ο. διαμ(conv(z_1, z_2, z_3, z_4)) $\geq \sqrt{\left|\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3}\right|}$

6) (i) A ανοικτό $\Rightarrow$ conv A ανοικτό

(ii) A κλειστό $\not\Rightarrow$ conv A = κλειστό

7) Παράδειγμα A συμπαγούς $\dim A = +\infty$: conv A όχι συμπαγές

8) Παράδειγμα $\{A_i : i \in I\}$, $A_i \subseteq \mathbb{R}$ που δεν ισχύει το Θ.Η.

9) $\{A_i : i = 1, \dots, d+1\}$ $A_i \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ $0 \in \bigcap_{i=1}^{d+1} A_i$

Τότε $\exists\ a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots a_{d+1} \in A_{d+1}$:

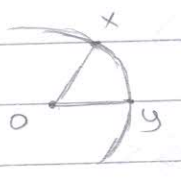
$0 \in conv\{a_1, a_2, \dots, a_{d+1}\}$ Imre Barany 1982

Διαχωριστικά θεωρήματα σε χ. Hilbert
Ιδιαιτέρως στον $\mathbb{R}^d$ (ευκλείδειος χώρος).

Χώρος με εσωτερικό γινόμενο: Έστω X δ.χ.
$\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ εσωτερικό γινόμενο $\Leftrightarrow$
(i) $\langle x,x\rangle \geq 0$, $x \in X$. Αν $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$.
(ii) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$
(iii) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$
(iv) $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$.
Εάν $\langle\cdot,\cdot\rangle$ εσωτερικό γινόμενο στο X τότε
$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $x\in X$ είναι νόρμα (ευκλ. νόρμα).
π.χ. $\mathbb{R}^d$ $\vec{x} = (x_1 \ldots x_d)$, $\vec{y} = (y_1 \ldots y_d)$
$\vec{x}\cdot\vec{y} = \langle\vec{x},\vec{y}\rangle = (\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$.
$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$
— $\ell_2 = \{(x_n)_n : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty\}$
$\langle (x_n)_n, (y_n)_n\rangle =: \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$
$\|(x_n)_n\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2}$
— $C_2([-1,+1]) = \{f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής$\}$.
$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f\cdot g$ εσωτερικό γινόμενο.
$\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f^2 dx\right)^{1/2}$

Ιδιότητες στο X χ. μ εσ. γιν.
1) Κανόνας Παραλληλογράμμου:
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, $x,y \in X$
[Εάν έχουμε $\|\cdot\|$ νόρμα σε Vδχ τότε $\|\cdot\|$ προέρχεται από εσ. γιν. ανν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου.]
2) $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$ C-S
3) $S(0,1) = \{x\in X : \|x\| < 1\}$ Το $\mathrm{bd}S(0,1) = \{y \in X : \|y\| = 1\}$ δεν περιέχει ευθύγραμμα τμήματα $[x,y]$, $x \neq y$

Απόδειξη:



3) Έστω $x,y \in X$: $\|x\|=\|y\|=1$, $x\neq y$

$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2+2=4$ (ΚΠ)

$x\neq y$ $\quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2<1 \Rightarrow \frac{x+y}{2}\in S(0,1) \Rightarrow$

$(x,y)\subseteq S(0,1)$

Γενικότερα: $S(x_0,r)$, $r>0$ bd$S(x_0,r)$ δεν περιέχει ευθύγραμμα τμήματα στο σύνορο της.

Ορισμός: Έστω $K\subseteq X$, $K\neq\emptyset$, $d(x,K):=\inf\{\|x-a\|: a\in K\}$. $d(x,K)=0 \Leftrightarrow x\in\bar{K}$

Αν Κ κλειστό $\subseteq X$ καλείται Chebyshev $\Leftrightarrow$ $x\in X$ υπάρχει ακριβώς ένα $y_x\in K$: $d(x,K)=\|x-y_x\|$

Το μοναδικό αυτό y_x καλείται εγγύτατο σημείο του x στο K ή η βέλτιστη προσέγγιση του x στο K

Σημείωση: Αν X = άπειρης διάστασης $X=C([-1,1])$ Υπάρχει Μ κλειστό και κυρτό $M\subseteq X$ και $g\in X$: $d(g,M)<\|g-f\|$ $\forall f\in M$.

Ορισμός: $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ Ο X καλείται χώρος Hilbert $\Leftrightarrow$ $(X,\|\cdot\|)$ είναι πλήρης χώρος με νόρμα (δηλαδή Banach)

Θεώρημα: Έστω X χ. Hilbert, $K\subseteq X$, K κυρτό + κλειστό. Για $x\in X$ υπάρχει ακριβώς ένα $y_x\in K$: $d(x,K)=\|x-y_x\|$ $\Rightarrow$ K Chebyshev

Απόδειξη:

Έστω $x\notin K$, $d(x,K)=\delta>0$ (K κλειστό).

$d(x,K)=\inf\{\|x-y\|: y\in K\}$ $\quad \exists y_n\in K : \|x-y_n\|\to\delta$

Έστω $n,m \geq 1$ $\|(x-y_n)-(x-y_m)\|^2 + \|(x-y_n)+(x-y_m)\|^2 \overset{\kappa.\Pi.}{=} 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2$

$\|y_m - y_n\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2$

K κυρτό $y_n, y_m \in K \Rightarrow \frac{y_n+y_m}{2} \in K$ $\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \geq d^2(x,K)$

$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - 4d^2(x,K) \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$

Άρα $(y_n)_n$ βασική στο X = Hilbert (πλήρης)

$\exists y_0 \in X : y_n \to y_0$ όμως $y_n \in K$ = κλειστό $\Rightarrow y_0 \in K$

Τότε $\|x-y_n\| \to \|x-y_0\| = d(x,K)$

Μοναδικότητα: Έστω $y_1, y_2 \in K : d(x,K) = \gamma = \|x-y_1\| = \|x-y_2\|$, $\gamma > 0$ και $y_1 \neq y_2$

Τότε $y_1, y_2 \in bd\, S(x,\gamma) \overset{y_1 \neq y_2}{\Rightarrow} \frac{y_1+y_2}{2} \in S(x,\gamma)$

$\left\|x - \frac{y_1+y_2}{2}\right\| < \gamma$ όμως K

κυρτό $\frac{y_1+y_2}{2} \in K$ Άτοπο.

Συνέπεια: Έστω X Hilbert χώρος, K κλειστό

Έστω οι ισχυρισμοί:

(i) K κυρτό

(ii) K Chebyshev

Αποδείξαμε ότι αν ισχύει το (i) ισχύει (ii)

Αν $X = \mathbb{R}^d$ τότε ισχύει και το αντίστροφο.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Αν $\dim X = +\infty$ (ii) $\Rightarrow$ (i) Ανοικτό πρόβλημα.

Ορισμός (Μετρική Προβολή): Έστω X = χ.Η.

K κλειστό + κυρτό. Για $x \in X$ υπάρχει μοναδικό $y_x \in K : d(x,K) = \|x-y_x\|$

Ορίζεται η μετρική προβολή του x στο K

$p_K: X \to K$ $\quad p_K(x) = y_x$.

Αν $x \notin K$ $\quad y_x \in bdK$.

Χαρακτηρισμός Εγγύτερου Σημείου Έστω X χ.Η.

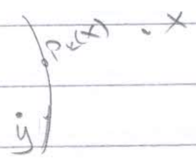
K κλ+κυρτό, $x \in X$, $y_0 \in K$ ΤΣΕΙ

(i) $y_0 = p_K(x)$

(ii) $\langle x-y_0, y-y_0\rangle \le 0 \quad \forall y \in K$

Απόδειξη:

Έστω ότι $x \notin K$.



(ii)⇒(i) Έστω $y \in K$, $y \neq y_0$

$\|x-y_0\|^2 = \langle x-y_0, x-y_0\rangle = \langle x-y_0, x-y\rangle + \langle x-y_0, y-y_0\rangle$

$\le \langle x-y_0, x-y\rangle \overset{C-S}{\le} \|x-y_0\|\|x-y\|$

$\|x-y_0\| \le \|x-y\| \quad \forall y \in K$ άρα $\|y_0-x\| = \min\{\|x-y\| : y \in K\} = d(x,K)$ Άρα $y_0 = p_K(x)$. (λόγω μον.).

(i)⇒(ii) Έστω $y \neq p_K(x)$, $y \in K$. Έστω $t \in (0,1)$

$z_t = p_K(x) + t(y-p_K(x)) \in K$.

$\|x-p_K(x)\|^2 \le \|x-z_t\|^2 = \|x-p_K(x)-t(y-p_K(x))\|^2 =$

$\|x-p_K(x)\|^2 + t^2\|y-p_K(x)\|^2 - 2t\langle x-p_K(x), y-p_K(x)\rangle$

$2\langle x-p_K(x), y-p_K(x)\rangle \le t\|y-p_K(x)\|^2$, $t \in (0,1)$

$\langle x-p_K(x), y-p_K(x)\rangle \le 0$.