ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ

Ορισμός (άλγεβρα): Έστω X σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X λέγεται άλγεβρα στο X αν έχει τις εξής ιδιότητες
(i) $X \in \mathcal{A}$
(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$
(iii) Αν $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

Ορισμός (σ-άλγεβρα): Έστω X σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X λέγεται σ-άλγεβρα στο X αν ισχύουν τα εξής:
(i) $X \in \mathcal{A}$
(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$
(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

- Έστω F οικογένεια υποσυνόλων του X τότε υπάρχει η $\sigma(F)$ ελάχιστη σ-άλγεβρα στο X που περιέχει την F.

Ορισμοί: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $\mathcal{L}$ η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του X
- Ένα $G \subseteq X$ λέγεται G_δ σύνολο αν $\exists G_n \in \mathcal{L}$ ώστε $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.
- Ένα $F \subseteq X$ λέγεται F_σ αν $\exists \{F_n\}$ ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.
- Ένα $B \subseteq X$ καλείται Borel αν $B \in \sigma(\mathcal{L})$

Ορισμός (μέτρο): Έστω X σύνολο και $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα στο X. Μια συνάρτηση $\mu: \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ καλείται αριθμήσιμα προσθετικό ή σ-προσθετικό μετρο αν ικανοποιει τα εξής:

(i) $\mu(\emptyset)=0$

(ii) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ αν $\{A_n\}$ ακολουθία ξενων ανα δυο στοιχειων της $\mathcal{A}$.

- Αν $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_n)$ με $A_i\cap A_j=\emptyset$ για $i\neq j$ το μ καλειται πεπερασμένα προσθετικό.

- Ο $(X,\mathcal{A})$ καλειται μετρήσιμος χωρος και $(X,\mathcal{A},\mu)$ χωρος μετρου. Τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ λεγονται μετρήσιμα σύνολα.

πχ $\delta_x : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$

$$\delta_x(A)=\begin{cases} 1, & x\in A \\ 0, & x\notin A \end{cases}$$

- αν $\mu(X)=1$ το λέμε μετρο πιθανοτητας

Μονοτονία Μετρου: Εστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χωρος μετρου Αν $A,B\in\mathcal{A}$ και $A\subseteq B$ τοτε $\mu(A)\leq\mu(B)$.

- Αν $A\subseteq B$ και $\mu(A)<+\infty$ τοτε $\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A)$

Υποπροσθετικότητα: Εστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χωρος μετρου Αν $\{A_n\}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ τοτε $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.

Ιδιοτητες: Εστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χωρος μετρου.

(i) Αν $\{A_n\}$ αυξουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$ τοτε $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$

(ii) Αν $\{B_n\}$ φθίνουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$ και $\mu(B_1)<+\infty$ τοτε $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)=\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)$

Ορισμός (εξωτερικό μέτρο): Έστω X σύνολο. Μια συνολοσυνάρτηση $\varphi: \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ λέγεται εξωτερικό μέτρο στο X αν ισχύουν τα εξής:

(i) $\varphi(\emptyset) = 0$

(ii) αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ (μονοτονία)

(iii) αν $\{A_n\}$ ακολουθία υποσυνόλων του X τότε $\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$

Πρόταση: Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και μ πεπερασμένα προσθετικό μέτρο στον $(X,\mathcal{A})$. Το μ είναι μέτρο αν ισχύει μια από τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

(ii) Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ στην $\mathcal{A}$ με $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$

Ορισμός: Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής.

$\lambda^* : P(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ με $\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) :$ $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Πρόταση: Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue είναι εξωτερικό μέτρο και ισχύει:

$\lambda^*([a,b]) = \lambda^*((a,b]) = \lambda^*([a,b)) = \lambda^*((a,b)) = b-a$

Ορισμός: Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue λ_d^* στον $\mathbb{R}^d$ ορίζεται ως εξής:

$\lambda_d^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ όπου I_n ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}\}$ όπου

$I = \prod_{i=1}^{d}(a_i, b_i)$ με $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, d$ και

$v(I) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)$

Πρόταση: Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue λ_d^* στον $\mathbb{R}^d$ είναι πράγματι εξωτερικό μέτρο και ισχύει $\lambda^*(I) = v(I)$ όπου I διάστημα στον $\mathbb{R}^d$

Ορισμός: Έστω $\varphi : P(X) \to [0,+\infty]$ εξωτερικό μέτρο. Ένα $B \subseteq X$ λέγεται φ μετρήσιμο αν $\varphi(A) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \cap B^c)$ $\forall A \subseteq X$

Συμβολίζουμε με M_φ την οικογένεια όλων των φ-μετρήσιμων υποσυνόλων του X

[σ-άλγεβρα Καραθεοδωρή]

Θεώρημα (Καραθεοδωρή): Έστω φ εξωτερικό μέτρο στο X. Τότε η M_φ είναι σ-άλγεβρα στο X και ο περιορισμός $\varphi|_{M_\varphi}$ του φ στην M_φ είναι πλήρες μέτρο.

Θεώρημα: Κάθε Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^d$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, δηλαδή $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{M}_{\lambda^*}$

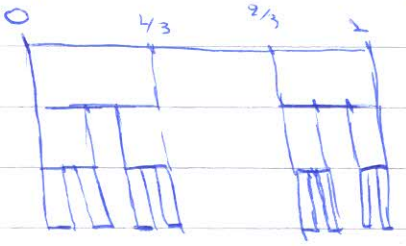
Ορισμός: Ο περιορισμός του λ_d^* στην $\mathcal{M}_{\lambda_d^*}$ συμβολίζεται με λ_d (ή απλά λ) και λέγεται μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$.

Πρόταση: Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ισχύει: $\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), B \supseteq A\} = \inf\{\lambda(U) : U \in \mathcal{L}, U \supseteq A\}$

Πρόταση: Αν A αριθμήσιμο $\Rightarrow \lambda(A) = 0$

πχ $\lambda(\mathbb{R}) = \lambda(\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = \lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = +\infty$

Πρόταση: Το σύνολο Cantor C είναι υπεραριθμήσιμο αλλά έχει μέτρο Lebesgue μηδέν.



$\lambda(A) = 0 \not\Rightarrow A$ αριθμήσιμο

Θεώρημα (Vitali): Υπάρχει υποσύνολο του $\mathbb{R}$ [και μάλιστα του $(0,1]$] που δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο και άρα, $\mathcal{M}_{\lambda^*} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$

Παρατήρηση: Αν $I = \prod_{i=1}^{d} I_i$, I_i διαστήματα του $\mathbb{R}$. Αν $\exists i$. $\lambda^*(I_i) = 0$ τότε $v(I) = 0$ δηλαδή συμφωνούμε ότι $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$.

Μετρήσιμες Συναρτήσεις

Ορισμός: Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μια συνάρτηση $f: X \to [-\infty, +\infty]$ λέγεται $\mathcal{A}$-μετρήσιμη αν: $\forall \beta \in \mathbb{R}$ το $[f \leq \beta] = f^{-1}([-\infty, \beta]) \in \mathcal{A}$.

$[f < \beta]$

$[\beta \leq f]$

$[\beta < f]$

Παρατηρήσεις:

(i) Κάθε Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

(ii) $(X, \mathcal{A})$, $B \subseteq X$ τότε $B \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \chi_B$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη

$$[\chi_B \leq \beta] = \begin{cases} \emptyset & , \beta < 0 \\ X \setminus B & , 0 \leq \beta < 1 \\ X & , 1 \leq \beta \end{cases}$$

(iii) Κάθε συνεχής $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη αφού $\forall \beta \in \mathbb{R}$ $[f \leq \beta]$ κλειστό σύνολο

(iv) I διάστημα, $f: I \to \mathbb{R}$ μονότονη $\Rightarrow$ f μετρήσιμη.

Πρόταση: $f: X \to \mathbb{R}$ Τ.Ε.Ε.Ι.:

(i) f μετρήσιμη

(ii) $[f \in G] = f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ $\forall G \in \mathcal{L}$

(iii) $[f \in F] = f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ $\forall F$ κλειστό

(iv) $[f \in B] = f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Πρόταση: Αν $f, g: X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες τότε

(i) $[f < g] = \{x \in X : f(x) < g(x)\} \in \mathcal{A}$

(ii) $[f \leq g] \in \mathcal{A}$

(iii) $[f=g]\in\mathcal{A}$.

Πρόταση: Έστω $f,g: X\to[-\infty,+\infty]$ μετρήσιμες. Τότε

(i) $f\wedge g$, $f\vee g$ μετρήσιμες όπου $(f\wedge g)(x)=\min\{f(x),g(x)\}$, $(f\vee g)(x)=\max\{f(x),g(x)\}$

(ii) $f^+=f\vee 0$, $f^-=(-f)\vee 0$ μετρήσιμες

Πρόταση: Έστω $f_n: X\to[-\infty,+\infty]$, $n\in\mathbb{N}$ ακολουθία μετρήσιμων

(i) οι $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$ είναι μετρήσιμες

(ii) $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ μετρήσιμες

(iii) $\lim\limits_n f_n$ μετρήσιμη συνάρτηση αν υπάρχει

Απόδειξη:

(i) $[\sup f_n\le b]=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[f_n\le b]\in\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ $\sup f_n$ μετρήσιμη.

$[\inf f_n<b]=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[f_n<b]\in\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ $\inf\limits_n f_n$ »

(ii) $\limsup\limits_n f_n=\inf\limits_n(\sup\limits_{k\ge n} f_k)$ $\Rightarrow$ μετρήσιμη

$\liminf\limits_n f_n=\sup\limits_n(\inf\limits_{k\ge n} f_k)$ $\Rightarrow$ μετρήσιμη.

(iii) Αφού $f_n\xrightarrow{\kappa\sigma} f$ έχουμε $\lim f_n=\liminf f_n=\limsup f_n$

Ορισμός (σ-πεπερασμένο μέτρο): $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=X$ και $\mu(A_n)<+\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

– Έστω $(X,\mathcal{A})$ και $(Y,\mathcal{B})$ χώροι μέτρου. Ένα υποσύνολο $R\subseteq X\times Y$ ονομάζεται μετρήσιμο ορθογώνιο όταν $R=K\times\Lambda$, $K\in\mathcal{A}$, $\Lambda\in\mathcal{B}$

$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}=\{\Lambda\times K: \Lambda\in\mathcal{A}, K\in\mathcal{B}\}$

Ορισμός: Έστω $C\subseteq X\times Y$ τότε $C_x=\{y\in Y:(x,y)\in C\}$ $C^y=\{x\in X:(x,y)\in C\}$.

$f_{x_0}(y)=f(x_0,y)$

$f^{y_0}(x)=f(x,y_0)$

Θεώρημα Fubini για χαρακτηριστικές: Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ και $(Y,\mathcal{B},\nu)$ χώροι σ-πεπερασμένα μέτρου. Για κάθε $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ ορίζουμε:

$\varphi_C : X \to [0,+\infty]$ με $\varphi_C(x) = \nu(C_x) \rightsquigarrow \mathcal{A}$-μετρήσιμη

$\psi_C : Y \to [0,+\infty]$ με $\psi_C(y) = \mu(C^y) \rightsquigarrow \mathcal{B}$-μετρήσιμη

Τότε $\int_C \varphi_C \, d\mu = \int_Y \psi_C \, d\nu$

$$\int_X \int_Y \chi_C(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int_Y \int_X \chi_C(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y).$$