$$0 = \varphi(0) = \varphi\left(\frac{h}{2} + \frac{-h}{2}\right) \le \frac{1}{2}\varphi(h) + \frac{1}{2}\varphi(-h) \Rightarrow$$

$\varphi(h) \ge -\varphi(-h) \ge -\|h\| F(-h)$

Άρα $-F(-h) \le \dfrac{\varphi(h)}{\|h\|} \le F(h)$, με $-F(-h) \to 0$, $\dfrac{\varphi(h)}{\|h\|} \to 0$, $F(h) \to 0$

Άρα η f είναι διαφορίσιμη.

Θεώρημα: Έστω $f: K \to \mathbb{R}$, K ανοικτό και κυρτό, f κυρτή. Τότε $\exists A \subseteq K \subseteq \mathbb{R}^d$, A μετρήσιμο σύνολο με $\lambda_d(A)=0$ τέτοιο ώστε η f να είναι διαφορίσιμη για $x \in K \setminus A$ [η f είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη στο K.]

Απόδειξη:

Για $d=1$ $\exists A \subseteq K$, A = αριθμήσιμο, $\lambda_1(A)=0$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x \in K \setminus A$.

Γενική περίπτωση Gruber

Για $d \ge 2$, $K = \mathbb{R}^d$

$A = \{x \in \mathbb{R}^d :$ η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $x_0\} = \{x_0 \in \mathbb{R}^d : f_{x_i}(x_0) = \partial f / \partial x_i (x_0)$ δεν υπάρχει για κάποιο $i \in \{1, 2, \dots, d\}\} = \bigcup_{i=1}^{d} \{x \in \mathbb{R}^d : f_{x_i}$ δεν υπάρχει στο $x_0\}$

$A_1 = \{x_0 \in \mathbb{R}^d : \nexists f_{x_1}$ στο $x_0\}$.

Έστω $x_0 \in A_1$ $g(t) = f(x_0 + t e_1) \Rightarrow$

$\nexists g'(0)$ και g κυρτή

$A_1 = \{x_0 \in \mathbb{R}^d : f^-_{x_1}(x_0) < f^+_{x_1}(x_0)\}$

$g_n(x) = \dfrac{f(x - e_1/n) - f(x)}{(-1/n)}$, $x \in \mathbb{R}^d$, f κυρτή $\Rightarrow$

f συνεχής $\Rightarrow g_n$ συνεχής

$\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = f^-_{x_1}(x)$, $x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow f^-_{x_1}$ μετρήσιμη.

ομοίως $f^+_{x_1}$ μετρήσιμη $\Rightarrow A_1$ μετρήσιμο.

$\lambda_d(A_1) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \lambda_1(A_1 \cap \{y + t e_1 : t \in \mathbb{R}\}) \, dy$

Ομως $A_1 \cap \{y + te_1 : t \in \mathbb{R}\}$: αριθμησιμο
$\lambda_1(A_1 \cap \{y+te_1 : t\in\mathbb{R}\}) = 0$ Αρα $\lambda_d(A_1) = 0$
Επομενως $\lambda_d(A) = \lambda_d(\bigcup_{i=1}^{d} A_i) \leq \sum_{i=1}^{d} \lambda_d(A_i) = 0$.

Προταση: Εστω $f: K \to \mathbb{R}$ κυρτη, K = κυρτο + ανοικτο $\subseteq \mathbb{R}^d$, $x_0 \in K$. Τ.Α.Ε.Ι.

(i) η f ειναι διαφορισιμη στο x_0

(ii) $\partial f(x_0) = \{u \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq f(x_0) + u(x-x_0), x \in K\}$ μονοσυνολο

Τοτε $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$, $f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0), x \in K\}$

Αποδειξη:

$d=1$ Γνωριζουμε $\sup\{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, x<x_0, x\in K\} = f'_-(x_0)$

$\leq f'_+(x_0) = \inf\{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, x>x_0, x\in K\}$

Αν $u \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ $f(x) \geq f(x_0) + u(x-x_0)$, $x\in K \Rightarrow$
$u \in \partial f(x_0)$ $\partial f(x_0) = [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$

Αρα η f ειναι παραγωγισιμη στο $x_0 \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \Leftrightarrow$
$\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.

$d \geq 2$ (i)⇒(ii) $\exists\, df(x_0) \Rightarrow \exists\, \partial f/\partial x_i(x_0)$, $i=1,\dots,d$

$u = u_1e_1 + \dots + u_de_d \in \partial f(x_0)$

$f(y) \geq f(x_0) + u(y-x_0)$ $y \in K$.

$f(x_0+te_i) \geq f(x_0) + u\cdot(te_i) = f(x_0) + u_i\cdot t$, $t: x_0+te_i \in K$.

$g_i(t) = f(x_0+te_i)$ κυρτη και $g_i'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \Rightarrow$

$u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ Αρα αν $u \in \partial f(x_0) \Rightarrow u = \nabla f(x_0) \Rightarrow$

$\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

(ii)⇒(i) Εστω οτι $\partial f(x_0) = \{u\}$, $u = u_1e_1 + \dots + u_de_d$
μοναδικο.

$f(x_0+te_i) \geq f(x_0) + tu_i \Rightarrow u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, $i=1,2,\dots,d$.

Αρα $\exists df(x_0)$ (Θεωρημα).

Θεωρημα: Εστω $f: K \to \mathbb{R}$ κυρτη και διαφορισιμη. Τοτε η f είναι C^1 (δηλαδή οι μερικές παράγωγοι $\partial f / \partial x_i$ είναι συνεχείς)

Απόδειξη:

Εστω $x_n, x_0 \in K$: $x_n \xrightarrow[n]{} x_0$. Πρεπει να δείξουμε οτι $\nabla f(x_n) \xrightarrow[n]{} \nabla f(x_0)$

Εστω $\Gamma = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ συμπαγές

$\exists \rho > 0 : \Delta = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, \Gamma) \leq \rho\} \subseteq K$ Δ = συμπαγες

Η f ομως είναι κυρτη αρα είναι Lipschitz συνεχης στα συμπαγη υποσυνολα του K.

$\exists L = L(\Gamma) : |f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\|$, $x, y \in \Delta$

$f(y) \geq f(x_n) + \nabla f(x_n) \cdot (y - x_n)$ $\forall y \in K$.

Εστω $n \in \mathbb{N} : \nabla f(x_n) \neq 0$, $y_n = x_n + \rho \dfrac{\nabla f(x_n)}{\|\nabla f(x_n)\|}$

$\|y_n - x_n\| = \rho$, $x_n \in \Gamma$, $y_n \in \Delta$

$|f(x_n) - f(y_n)| \leq L \|x_n - y_n\| = L \cdot \rho$.

$\nabla f(x_n) \cdot (y_n - x_n) = \rho \|\nabla f(x_n)\| \leq f(y_n) - f(x_n) \leq |f(x_n) - f(y_n)|$
$\leq L\rho$. Αρα $\|\nabla f(x_n)\| \leq L$.

Αρα η $(\nabla f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ φραγμενη

Εστω $\nabla f(x_{k_n}) \to v \in \mathbb{R}^d$

$f(y) \geq f(x_{k_n}) + \nabla f(x_{k_n}) \cdot (y - x_{k_n})$

$x_{k_n} \to x_0$ f συνεχης, $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$

$f(y) \geq f(x_0) + u(y - x_0)$, $y \in K$

Αρα $u = \nabla f(x_0)$

Αρα καθε υπακολουθια της $(\nabla f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ που συγκλινει, εχει όριο το $\nabla f(x_0)$ Τελικα $\nabla f(x_n) \to \nabla f(x_0)$.

Gruber

Θεώρημα Alexandrov: Έστω $f: K \to \mathbb{R}$ κυρτή K = ανοικτό και κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε η f είναι σχεδόν παντού C^2 στο K ($\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ σ.π. συνεχείς στο K).

Κριτήριο κυρτότητας 2-τάξης:

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$, I διάστημα ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$. Έστω ότι $\exists f''$ στο I. f κυρτή $\iff f'' > 0$.

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$, A: ανοικτό, $x_0 \in A$

$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $1 \leq i,j \leq d$

Ορίζεται ο Εσσιανός πίνακας της f στο x_0

$$H(x_0) = \begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial x_1^2 & \partial^2 f/\partial x_1 \cancel{\partial x_2} & \cdots & \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_d \\ \vdots & & & \\ \partial^2 f/\partial x_d \partial x_1 & \partial^2 f/\partial x_d \partial x_2 & & \partial^2 f/\partial x_d^2 \end{pmatrix}(x_0)$$

Εάν $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ συνεχείς τότε $H(x_0)$ = συμμετρικός

$D_2 f(x_0)(h) = h^t H(x_0) h$, $h \in \mathbb{R}^d$ Τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί στο $H(x_0)$

$D_2 f(x_0)(\lambda h) = \lambda^2 D_2 f(x_0)(h)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ορισμός: $H(x_0) \geq 0$ θετικά ορισμένος $\iff$ $D_2 f(x_0)(h) \geq 0$ $h \in \mathbb{R}^d$ $\iff$ $D_2 f(x_0)(h) \geq 0 : \|h\| \geq 1$ $\iff$ οι ιδιοτιμές του $H(x_0)$ $\lambda_1, \dots \lambda_d \geq 0$.

Έστω ότι $f: A \to \mathbb{R}$ είναι C_2 τότε:

$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^t H(x_0 + t_0(x - x_0)) \cdot (x - x_0)$ για κάποιο $t_0 \in (0,1)$ (Taylor με υπόλοιπο

Lagrange.

Θεώρημα (Brünn – Hadamard): Έστω $f: K\to\mathbb{R}$, K κυρτό + ανοικτό και f C^2. ΤΑΕΙ:

(i) f κυρτή

(ii) $H(x)\geq 0$, $x\in K$

Απόδειξη:

(ii) ⇒ (i) Έστω $H(y)\geq 0$, $y\in K$, $x_0\in K$.

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^t H(x_0+t(y-x_0))\cdot(x-x_0)$$

για κάποιο $t\in(0,1)$

$f(x)\geq f(x_0)+\nabla f(x_0)(x-x_0)$, $x\in K$. Άρα f κυρτή.

(i) ⇒ (ii) Έστω f κυρτή, $x_0\in K$, $h\in\mathbb{R}^d : \|h\|=1$.

$g_h(t) = f(x_0+th)$, $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, $S(x_0,\varepsilon)\subseteq K$.

$g_h'(t) = \nabla f(x_0+th)\cdot h$

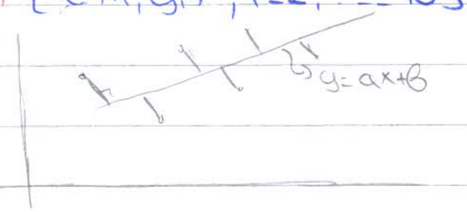
$g_h''(0) = h^t H(x_0) h$

Η g_h είναι κυρτή ⇒ $g_h''(0)\geq 0$ ⇒ $h^t H(x_0) h\geq 0$

h = τυχαίο, $\|h\|=1$ $H(x_0)\geq 0$.

Ασκήσεις 9:

(1) $\{(x_i,y_i),\ i=1,\dots,N\}\subseteq\mathbb{R}^2$, $N\geq 2$. Δ.Ο. η $f(a,b)=\sum_{i=1}^{N}(ax_i+b-y_i)^2$ έχει ολικό ελάχιστο.



Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

(2) Έστω $K\subseteq\mathbb{R}^d$, K: κυρτό και συμπαγές, $D=\{h=f-g$ όπου $f,g:K\to\mathbb{R}$ συνεχείς + κυρτές$\}$.

$\overline{D}=C(K)=\{\varphi:K\to\mathbb{R}$ συνεχείς$\}$ $\|\varphi\|_\infty=\max\{|\varphi(x)|, x\in K\}$

(3) $f:K\to\mathbb{R}$, f συνεχής και $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$

(Middle point convexity)

Τότε η f είναι κυρτή

(4) $f: K \to \mathbb{R}$, f διαφορίσιμη, K ανοικτό + κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^d$

ΤΑΕΙ:

(i) f κυρτή

(ii) $(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x-y) \geq 0$. $x, y \in K$

(5) $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ κυρτή, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, Έστω $a \in \mathbb{R}^d$ Δ.ο.

$\exists\, f'(x_0, a) =: \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t}$

Δεξιά Gauteaux παρ. της f στο x_0 ως προς το a.

Επίσης: (i) $f'(x_0, a) = D_a^+ f(x_0)$, $\|a\| = 1$

(ii) $f'(x_0, \cdot)$ είναι θετικά ομογενής ($g(\lambda y) = \lambda g(y)$, $\lambda \geq 0$) κυρτή. Υπάρχει $v_0 \in \mathbb{R}^d$: $f'(x_0, a) \geq v_0 \cdot a$ $\forall a \in \mathbb{R}^d$

(iii) $f'(x_0, a) \geq -f'(x_0, -a)$ (Η f είναι G-διαφ. όταν ισχύει $=$)

(iv) $\partial f(x_0) = \{ u \in \mathbb{R}^d : f'(x_0, a) \geq u \cdot a \ \forall a \in \mathbb{R}^d \}$ κυρτό η αλλαγές.

Ιδιαιτέρως: Για $d = 1$ $\partial f(x_0) = [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$.