Δευτέρα 27 Μαΐου 2013 — Κυρτή Ανάλυση

Μάθημα 13

Ανισότητα των Brunn-Minkowski – Ισοπεριμετρική Ανισότητα (μεικτοί όγκοι) – Ισοπεριμετρικό πρόβλημα στον $\mathbb{R}^d$ $(d\geq 2)$

Ανισότητα των Brunn-Minkowski

Έστω K_1, K_2 κυρτά συμπαγή στον $\mathbb{R}^d$, $\dim K_1 = \dim K_2 = d$. Τότε:

(i)
$$V^{1/d}((1-\lambda)K_1+\lambda K_2) \geq (1-\lambda)V^{1/d}(K_1)+\lambda V^{1/d}(K_2),\quad \lambda\in[0,1]$$

Εάν υπάρχει $\lambda_0\in(0,1)$ ώστε να ισχύει "=", τότε τα K_1, K_2 είναι ομοιόθετα ($K_2 = x_0+\mu K_1$) για κάποια $x_0\in\mathbb{R}^d$, $\mu>0$.
Τότε ισχύει "=" για κάθε $\lambda\in[0,1]$

(ii) $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$, $\varphi(t) = V^{1/d}((1-t)K_1+tK_2) - (1-t)V^{1/d}(K_1) - tV^{1/d}(K_2)$
Τότε $\varphi(t)\geq 0$, $t\in[0,1]$

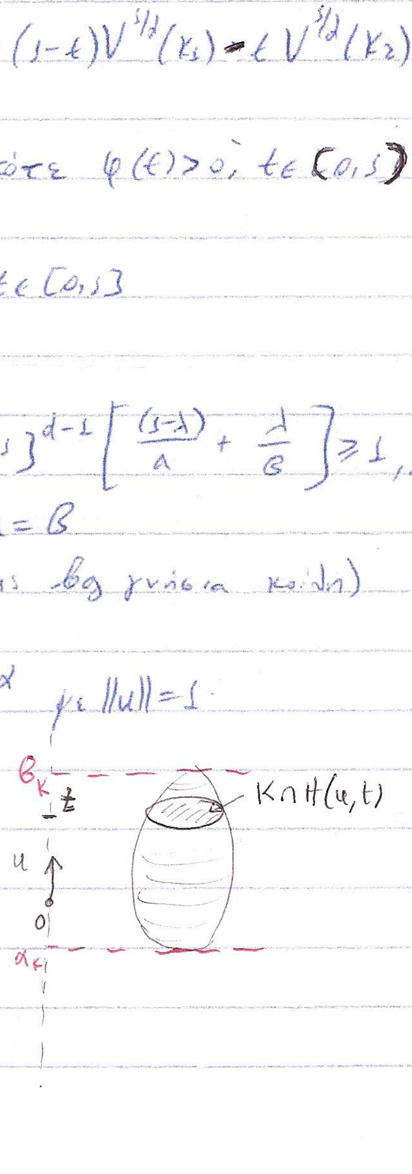
{ Εάν K_1, K_2 δεν είναι ομοιόθετα, τότε $\varphi(t)>0$, $t\in(0,1)$
{ φ είναι κοίλη

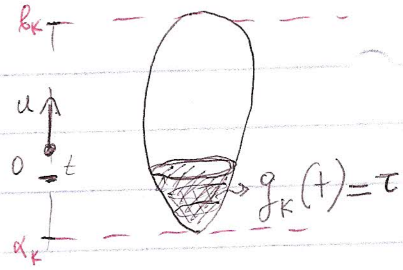
{ Εάν K_1, K_2 ομοιόθετα τότε $\varphi(t)=0$, $t\in[0,1]$

Για την απόδειξη χρειαζόμαστε:

1) $a, b>0$, τότε $\left[(1-\lambda)a^{1/d-1}+\lambda b^{1/d-1}\right]^{d-1}\left[\frac{(1-\lambda)}{a}+\frac{\lambda}{b}\right]\geq 1$, $\lambda\in[0,1]$
Εάν $\exists\, \lambda_0\in(0,1)$: να ισχύει "=", τότε $a=b$
(απόδειξη αφήνεται ως άσκηση (υπόδειξη: $\lg$ γνήσια κοίλη))

2) K = κυρτό + συμπαγές, $\dim K = d$, $u\in\mathbb{R}^d$ με $\|u\|=1$
$a_K = \min\{\langle x,u\rangle : x\in K\}$
$b_K = \max\{\langle x,u\rangle : x\in K\} = h_K(u)$
Τότε:
$$V_d(K) = \int_{a_K}^{b_K} V_{d-1}(K\cap H(u,t))\,dt$$
(Θ. Fubini)





$$g_K(t)=\int_{\alpha_K}^{t} V_{d-1}(K\cap H(u,x))\,dx,\quad t\in[\alpha_K,\beta_K]$$

$V_{d-1}(K\cap H(u,x)),\ x\in[\alpha_K,\beta_K]$

<u>Ισχυρισμός</u>: αν $x_n\to x$, $K\cap H(u,x_n)\xrightarrow{\delta} K\cap H(u,x)$ (K = κυρτό)

Άρα $V_{d-1}(K\cap H(u,x))$ είναι συνεχής συνάρτηση

Από το Θ.Θ.Α.Λ.

$$\exists\, g_K'(t)=V_{d-1}(K\cap H(u,t))>0,\quad t\in(\alpha_K,\beta_K)$$

και g_K = συνεχής στο $[\alpha_K,\beta_K]$, $g([\alpha_K,\beta_K])=[0,c]$, $c=V_d(K)$

Άρα: $\exists\, g_K^{-1}=f_K:[0,c]\to[\alpha_K,\beta_K]$ συνεχής και αν

$f_K(T)=t$. τότε $f_K'(T)=\dfrac{1}{V_{d-1}(K\cap H(u,f(T)))}$, $T\in(0,c)$

<u>Απόδειξη</u>

Για $d=1$ ισχύει η B-M ως ισότητα

Έστω ότι ισχύει για $d-1$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για d.

Έστω $\lambda\in(0,1)$

<u>1η περίπτωση</u>: $V(K_1)=V(K_2)=1$

$f_i=f_{K_i}$ $i=1,2$ / $f_\lambda(T):=(1-\lambda)f_1(T)+\lambda f_2(T)$, $T\in[0,1]$, $K_\lambda=(1-\lambda)K_1+\lambda K_2$

$$K_\lambda\cap H(u,f_\lambda(T))\overset{(*)}{\supseteq}(1-\lambda)[K_1\cap H(u,f_1(T))]+\lambda[K_2\cap H(u,f_2(T))]$$

$$V(K_\lambda)=\int_{(1-\lambda)\alpha_{K_1}+\lambda\alpha_{K_2}}^{(1-\lambda)\beta_{K_1}+\lambda\beta_{K_2}} V_{d-1}(K_\lambda\cap H(u,t))\,dt=$$

(Έστω $t=f_\lambda(T)$)

$$=\int_0^1 V_{d-1}(K_\lambda\cap H(u,f_\lambda(T)))\cdot f_\lambda'(T)\,dt \overset{(*)}{\geq}\int_0^1 V_{d-1}\Big[(1-\lambda)[K_1\cap H(u,f_1(T))]$$

$$+\lambda[K_2\cap H(u,f_2(T))]\Big]\cdot f_\lambda'(T)\,dT \overset{\text{Επαγωγή}}{\geq}\int_0^1\Big[(1-\lambda)V_{d-1}^{\frac{1}{d-1}}(K_1\cap H(u,f_1(T)))+\lambda V_{d-1}^{\frac{1}{d-1}}(K_2\cap H(u,f_2(T)))\Big]$$

$$\left[\frac{(1-\lambda)}{V_\lambda(K\cap H(u,t}+\frac{\lambda}{V_{d-1}(K_2\cap H(u,f_2(T)))}\right]dt \overset{(1)}{\geq}\int_0^1 1\,dT=1$$

Άρα $V((1-\lambda)K_1+\lambda K_2)\geq 1 \Rightarrow V^{1/d}((1-\lambda)K_1+\lambda K_2)\geq (1-\lambda)V^{1/d}(K_1)+\lambda V^{1/d}(K_2)$

2η περίπτωση

$V(K_i)>0,\quad i=1,2$

$K_i'=\dfrac{K_i}{V^{1/d}(K_i)},\quad V(K_i')=1\quad i=1,2$

$\lambda'=\dfrac{\lambda V^{1/d}(K_2)}{(1-\lambda)V^{1/d}(K_1)+\lambda V^{1/d}(K_2)}\in(0,1)$. Αντικαθιστούμε K_i', λ' στην 1η περίπτωση.

Ισότητα:

Έστω ότι $V(K_i)=1,\ i=1,2$ και ισχύει η ισότητα για κάποιο $\lambda\in(0,1)$. Έστω $u\in\mathbb{R}^d,\ \|u\|=1$

Πρέπει να ισχύει η $a=B$ στην (1)

$V_{d-1}(K_1\cap H(u,f_1(T)))=V_{d-1}(K_2\cap H(u,f_2(T))),\quad T\in(0,1)$

$f_1'(T)=f_2'(T),\quad T\in(0,1)$

Άρα $f_1(T)=f_2(T)+\theta,\quad T\in[0,1]$ (f_i = συνεχής στο $[0,1]$)

Έστω ότι ο κέντρο βάρους των K_1, K_2

$$0=\int_{K_i}\langle\vec{x},u\rangle d\vec{x}=\int_{\alpha_{K_i}}^{B_{K_i}} tV_{d-1}(K_i\cap H(u,t))dt=$$

$$\underset{t=f_i(T)}{=}\int_0^1 f_i(T)\cdot f_i'(T)\left(\frac{1}{f_i'(T)}\right)dT=\int_0^1 f_i(t)dt$$

Άρα $\theta=0$ / $f_1(T)=f_2(T),\quad T\in[0,1]$

$f_1(1)=B_{K_1}=h_{K_1}(u)$

$f_2(1)=B_{K_2}=h_{K_2}(u)$

Το u είναι τυχαίο, $\|u\|=1\Rightarrow h_{K_1}=h_{K_2}\Rightarrow K_1=K_2$

Αν x_1 κ.β. K_1, x_2 κ.β. K_2

τότε K_1-x_1, K_2-x_2 έχουν κ.β. το 0, όγκο 1 και άρα

$K_1-x_1=K_2-x_2\Rightarrow K_1=y_0+K_2$

Αν $V(K_i)>0$

$$\frac{K_1}{V^{1/d}(K_1)} = y_0 + \frac{K_2}{V^{1/d}(K_2)} \Rightarrow K_1 = z_0 + \mu K_2,\ \mu \geq 0$$

2) φ κοίλη $\rightarrow$ άσκηση (Υπόδειξη: Αν K κυρτό $\Rightarrow K=(1-\lambda)K+\lambda K,\ \lambda\in(0,1)$)

Πόρισμα:

$$V^{1/d}(K_1+K_2) \geq V^{1/d}(K_1) + V^{1/d}(K_2) \qquad (\text{B-M με } \lambda=\tfrac{1}{2})$$

Πόρισμα: Αρχή του Minkowski

K = κυρτό + συμπαγές, $\dim K = d$

$u \in \mathbb{R}^d$, $\|u\|=1$

$$f_u(t) = V_{d-1}^{1/(d-1)}(K \cap H(u,t)) \text{ κοίλη}$$

(από εδώ ξεκίνησε το πρόβλημα του Minkowski)

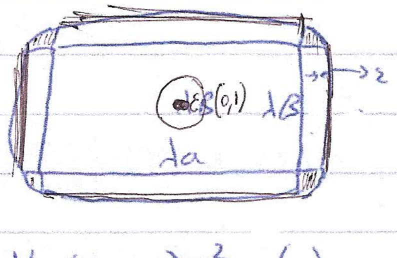
Μεικτοί όγκοι

π.χ. στον $\mathbb{R}^2$

(i) $\lambda, \varepsilon > 0$ A = ορθογώνιο πλευρών $a, \beta > 0$

$B(0,1)$

$V_2(\lambda A + \varepsilon B(0,1)) =$



$= (\lambda a)(\lambda\beta) + (2\lambda a\varepsilon + 2\lambda\beta\varepsilon) + \pi\varepsilon^2$

$$= V_2(A)\lambda^2 + \underbrace{(2a+2\beta)}_{\text{περ}(A)}\lambda + V_2(B(0,1))\varepsilon^2 \quad (1)$$

Αν $\lambda = 1$, $\text{περ}(A) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{V_2(A+\varepsilon B(0,1)) - V_2(A)}{\varepsilon}$

Η (1) γράφεται: $\binom{2}{0}V_0\lambda^2 + \binom{2}{1}V_1\lambda\varepsilon + \binom{2}{2}V_2\varepsilon^2$; $V_1 = V_1(A,B) = \frac{\text{περ}(A)}{2}$

(ii) $\mathbb{R}^3$

A = ορθογώνιο με πλευρές α, β, γ, $B(0,1)$ η μοναδιαία μπάλα

$$V_3(\lambda A + \varepsilon B(0,1)) = \lambda^3(\alpha\beta\gamma) + (2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma)\lambda^2\varepsilon + (\alpha+\beta+\gamma)\pi\lambda\varepsilon^2 + \varepsilon^3(V_3(B(0,1))) =$$

$$= \binom{3}{1} V_0(A)\lambda^3 + \binom{3}{1} V(A, A : B)\lambda^2\varepsilon + \binom{3}{2} V(A,B,B)\lambda\varepsilon^2 + \binom{3}{3} V_d\,\varepsilon^3$$

Παρ/μα: για $\lambda = 1$ εμβαδόν επιφανείας $= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{V_3(A+\varepsilon B(0,1)) - V_3(A)}{\varepsilon}$.

Θεώρημα (Μεικτών όγκων)

K, L κυρτά συμπαγή διάστασης d, στον $\mathbb{R}^d$

$$V(\lambda K + \mu L) = \binom{d}{0} V((K,d))\lambda^d + \binom{d}{1} V((K,d-1),(L,1))\lambda^{d-1}\mu + \dots + \binom{d}{d} V((1,d))\mu^d, \quad \forall \lambda,\mu \geq 0$$

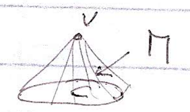
όπου $V_0 = V((K,d)) = V(\underbrace{K,K,\dots,K}_{d\text{-φορές}}) = V_d(K)$

$V_d = V((L,d)) = V(\underbrace{L,\dots,L}) = V_d(L)$

$V_1 = V(\underbrace{K,K,\dots,K}_{K-1}, 1)^{d\text{-φορές}}$ κοκ.

→ ομογενές πολυώνυμο d-βαθμού, $V_i \geq 0$

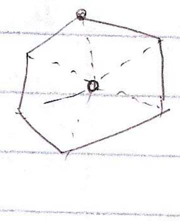
Για την απόδειξη (βιβλίο Schneider) χρειάζεται:



1) $v \notin \mathrm{aff}(C)$, $\Pi = \mathrm{con}(C \cup \{v\})$, $V(\Pi) = \frac{1}{d} h V_{d-1}(C)$ (Fubini)

2) $\dim P = d$, P = πολύτοπο $\overset{\text{πολύτοπο}}{=}$ πολύεδρο, $f_i = P \cap H(u_i, h_P(u_i))$, $i = 1,\dots,n$

$$V_d(P) = \sum_{i=1}^{n} h_P(u_i) V_{d-1}(f_i)$$



3) Ισχύει το Θ. για P και Q πολύτοπα (επαγωγή)

4) $g_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ακολουθία ομογενών πολυωνύμων βαθμού d και $g_n(\lambda,\mu) \to f(\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu \geq 0$

Τότε f = ομογ. πολ. d-βαθμού

5) K, L = κυρτά + συμπαγή

Τότε $\exists\, P_n, Q_n$ = πολύτοπα : $P_n \xrightarrow{\delta} K$

$Q_n \xrightarrow{\delta} L$

Τότε $\lambda P_n + \mu Q_n \xrightarrow{\delta} \lambda K + \mu L$

$$V(\lambda P_n + \mu Q_n) \xrightarrow[n]{} V(\lambda K + \mu L)$$

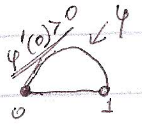
Ισοπεριμετρική ανισότητα

Έστω K_1, K_2 κυρτά + συμπαγή διάστασης d στον $\mathbb{R}^d$

$$\varphi(t) = V^{1/d}((1-t)K_1 + tK_2) - (1-t)V^{1/d}(K_1) - tV^{1/d}(K_2) =$$

$$= \Big[\sum_{i=0}^{d} V_i (1-t)^{d-i} t^i\Big]^{1/d} - (1-t)V_0^{1/d} - tV_d^{1/d}$$

$$\varphi'(0) = V_0^{1/d - 1}\Big[V(\underbrace{K_1, K_1, \ldots, K_1}_{d-1}, K_2) - V^{1/d}(K_2)\,V(K_1)^{1-1/d}\Big]$$



Αν K_1, K_2 όχι ομοιόθετα, $\varphi(t) > 0$, φ = κοίλη, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$

Αν K_1, K_2 ομοιόθετα, $\varphi \equiv 0$

Εάν K_1, K_2 όχι ομοιόθετα $\Longleftrightarrow \varphi'(0) > 0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \boxed{V^d(\underbrace{K_1, \ldots, K_1}_{d-1}, K_2) > V(K_2)V(K_1)^{d-1}}$$: Ισοπεριμετρική Ανισότητα.

Εάν K_1, K_2 ομοιόθετα ισχύει ισότης.

Ορισμός εμβαδού επιφανείας (κατά Minkowski)

K = κυρτό + συμπαγές

$$V(K + \varepsilon B(0,1)) = V(K) + V_1 d\varepsilon + \binom{d}{2} V_2 \varepsilon^2 + \ldots + \binom{d}{d} V_d \varepsilon^d$$

Άρα $\exists \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{V(K + \varepsilon B(0,1)) - V(K)}{\varepsilon} = V_1 d$, $V_1 = V(\underbrace{K, K, \ldots K}_{d-1}, B(0,1))$

Ορίζουμε $E(K) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{V(K + \varepsilon B(0,1)) - V(K)}{\varepsilon}$ [Εμβαδόν επιφάνειας του K]

• Τότε $$E(B(0,1)) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{V(B(0,1)) + \varepsilon B(0,1)) - V(B(0,1))}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{V(B(0,1+\varepsilon)) - V(B(0,1))}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{(1+\varepsilon)^d - 1}{\varepsilon} V(B(0,1)) = d \cdot V(B(0,1))$$

Στην ισοπεριμετρική ανισότητα
$K = K_1$ και $B(0,1) = K_2$
Τότε, παίρνουμε

$$\left[\frac{E(K)}{d}\right]^d \geq V(B(0,1)) \cdot V^{d-1}(K)$$

ισότης $\Leftrightarrow$ K = σφαίρα

$$\left(\substack{\text{Διαιρούμε} \\ \text{με } V^d(B)}\right) \left[\frac{E(K)}{d\,V(B)}\right]^d \geq \left[\frac{V(K)}{V(B)}\right]^{d-1} \Rightarrow \boxed{\left[\frac{E(K)}{E(B(0,1))}\right]^d \geq \left[\frac{V(K)}{V(B(0,1))}\right]^{d-1}}$$

Ισοπεριμετρικό Πρόβλημα

Άρα, από όλα τα κυρτά και συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με όγκο $V(K) = V(B(0,1))$ η σφαίρα και <u>μόνο</u> έχει το ελάχιστο εμβαδόν επιφάνειας.
Και επίσης από όλα τα κυρτά και συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με εμβαδόν επιφανείας $E(K) = E(B(0,1))$ η σφαίρα και <u>μόνο</u> έχει τον μέγιστο όγκο

<u>Ασκήσεις</u>

(1) (i) Αν $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_c$, $K_2 \subseteq \varepsilon \varepsilon K_1$. Τότε $\exists\, n > 0$:
αν $K \in \mathcal{K}_c$, $\delta(K_1, K) < n$ τότε $K_2 \subseteq K$.
(ii) Αν $K \in \mathcal{K}_c$, $\mu > 1$ τότε $\exists$ P πολύτοπο ώστε $P \subseteq K \subseteq \mu P$

(2) Αν $A, B \in \mathcal{K}_c$, $A \subseteq B$, $A \neq B$ τότε $V_d(A) < V_d(B)$
(3) $V(K-K) \geq 2^d\, V(K)$ / $K \in \mathcal{K}_c$ διάστασης d
και ισότης όταν K = συμμετρικό ως προς σημείο

$$V(K-K) \leq \binom{2d}{d} V(K) \;/\; K = d\text{-simplex } (1957)$$

(4) Από όλα τα συμπαγή σύνολα διαμέτρου 1, η σφαίρα διαμέτρου 1 έχει το μέγιστο όγκο

5) Αν $K \subseteq \mathbb{R}^d$, K = κλειστό με την ιδιότητα Chebyshev συνόλου τότε το K είναι κυρτό

ΤΕΛΟΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ