Δευτέρα 20 Μαΐου 2013 Κυρτή Ανάλυση

Μάθημα 12

Μετρική του Hausdorff. Θεώρημα Επιλογής του Blaschke

$\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)=\mathcal{H}=\{K\subseteq \mathbb{R}^d : K\neq\emptyset,\ K=\text{συμπαγές}\}$

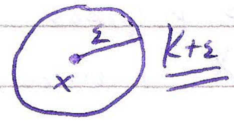
Έστω $K=$ συμπαγές, $\neq\emptyset$

$B(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^d : \|x\|\leq 1\}$

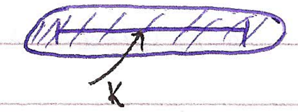
$K+\varepsilon := K+\varepsilon B(0,1)=\bigcup_{x\in K} B(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}^d : d(y,K)\leq\varepsilon\}$

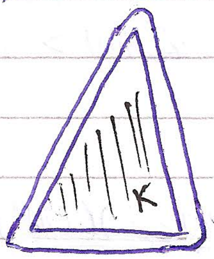
Ακόμα, $K+\varepsilon=$ συμπαγές, $K\subseteq K+\varepsilon$

π.χ. Στον $\mathbb{R}^2$, αν $K=\{x\}$ και $\varepsilon>0$



Αν $K=B(x,r)$, $K+\varepsilon=B(x,r+\varepsilon)$





Έστω τώρα $K,L\in\mathcal{H}$

$K=$ φραγμένο. Έστω $y_0\in L$

$\exists M>0: K\subseteq B(x_0,M)=x_0+MB(0,1)\subseteq L+M$

Ομοίως υπάρχει M' : $L\subseteq K+M'$

~~Έστω~~ Άρα: $I=\{\varepsilon\geq 0 : K\subseteq L+\varepsilon,\ L\subseteq K+\varepsilon\}\neq\emptyset$

Τότε $\exists\,\varepsilon_0=\inf\{\varepsilon\geq 0 : K\subseteq L+\varepsilon,\ L\subseteq K+\varepsilon\}\in[0,+\infty)$

Θα δείξουμε ότι $\varepsilon_0\in I$, δηλ. $\varepsilon_0=\min\{\varepsilon\geq 0 : K\subseteq L+\varepsilon,\ L\subseteq K+\varepsilon\}$

Πράγματι, $\varepsilon_0 = \inf I \Rightarrow \exists \varepsilon_n \downarrow : \varepsilon_n \in I,\ \varepsilon_n \to \varepsilon_0$

Τότε, αφού $\varepsilon_n \in I$ $\quad K \subseteq L + \varepsilon_n B(0,1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

και ομοίως $\quad L \subseteq K + \varepsilon_n B(0,1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Τότε $\quad K \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (L + \varepsilon_n B(0,1)) = L + \varepsilon_0 B(0,1)$ (L = κλειστό, $B(0,1)$ = συμπαγές)

Αναλόγως $\quad L \subseteq K + \varepsilon_0 B(0,1)$

Άρα, $\varepsilon_0 \in I$

<u>Ορισμός</u>: Εάν $K, L \in \mathcal{H}$, ορίζουμε $\delta(K,L) = \min\{\varepsilon \geq 0 : K \subseteq L + \varepsilon,\ L \subseteq K + \varepsilon\}$ την <u>μετρική Hausdorff</u>

<u>Πρόταση</u>:

(1) Ο $\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), \delta \rangle$ μετρικός χώρος

(2) $X \neq \emptyset$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$, X = κλειστό, τότε $\langle \mathcal{H}(X), \delta \rangle$ κλειστός υπόχωρος του $\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), \delta \rangle$

(3) $\delta(\{x\}, \{y\}) = \|x - y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^d$

Δηλ., ο $\langle \mathbb{R}^d, \|\cdot\| \rangle$ εμβαπτίζεται ισομετρικά στον $\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), \delta \rangle$

<u>Απόδειξη</u>

(i) Έστω $K, L, M \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$

(α) $\delta(K,L) \geq 0$

Αν $\delta(K,L) = 0 \Rightarrow$
$$\left.\begin{array}{l} K \subseteq L + 0 B(0,1) \Rightarrow K \subseteq L \\ L \subseteq K + 0 B(0,1) \Rightarrow L \subseteq K \end{array}\right\} \Rightarrow K = L$$

(β) $\delta(K,L) = \delta(L,K)$ (προφανώς)

(γ) Θέλουμε τέλος $\delta(K,L) \leq \delta(K,M) + \delta(M,L)$

Έστω $a = \delta(K,M)$, $\beta = \delta(M,L)$

Τότε
$$\left.\begin{array}{l} K \subseteq M + a B(0,1) \\ M \subseteq L + \beta B(0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow K \subseteq L + (a+\beta) B(0,1)$$

Όμοια, $L \subseteq K + (a+\beta) B(0,1)$. Και άρα $\delta(K,L) \leq a + \beta = \delta(K,M) + \delta(M,L)$

Συνέχεια απόδειξης πρότασης

(ii) Έστω $X=$ κλειστό $\subseteq \mathbb{R}^d$. Θέλουμε $<\mathcal{H}(X),\delta>$ κλειστό στον $<\mathcal{H}(\mathbb{R}^d),\delta>$

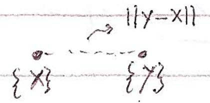
Έστω $K_n \in \mathcal{H}(X)$, $K_n \xrightarrow{\delta} K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$

Έστω $\varepsilon>0$. $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\delta(K_n,K)<\varepsilon \quad \forall n\geq n_0$

$\Longrightarrow K\subseteq K_n+\varepsilon B(0,1) \quad \forall n\geq n_0$ και $K_n\subseteq X$

Άρα $K\subseteq X+\varepsilon B(0,1) \quad \forall \varepsilon>0 \Rightarrow K\subseteq\{y: d(y,X)\leq\varepsilon\}=\bar{X}=X$ (κλειστό)

(iii) Άμεση η απόδειξη



Ασκήσεις

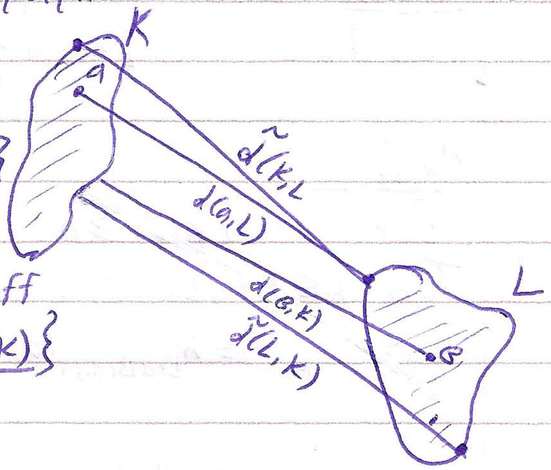
(1) Ισοδύναμος ορισμός της μετρικής δ

Έστω $K, L \in \mathcal{H}$

Ορίζουμε $\tilde{d}(K,L)=\max\{d(a,L): a\in K\}$

Ομοίως $\tilde{d}(L,K)=\max\{d(b,K): b\in L\}$

Ορίζουμε την μετρική Hausdorff ως $\delta(K,L)=\max\{\tilde{d}(K,L),\tilde{d}(L,K)\}$



Να δείξουμε ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι

(2) i) Έστω $A_n\in\mathcal{H}$, $A_1\supseteq A_2\supseteq\dots$ φθίνουσα ακολουθία. Τότε ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

ii) Έστω $K_n\in\mathcal{H}$, $\lim_{n\to\infty} K_n=K$. Τότε $K=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} K_j\right)}$

③ Δείξτε ότι: (i) $\delta(K+x, L+x) = \delta(K,L) \quad \forall K,L \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$

(ii) $\delta(\operatorname{co} K, \operatorname{co} L) \leq \delta(K,L)$

④ $\delta(B(x_0,r), B(y_0,R)) = \|x_0-y_0\| + |R-r|$

Εάν $B(x_n, r_n) \xrightarrow{\delta} K$. Τότε, το K είναι σφαίρα

⑤ Εάν $\left.\begin{array}{l} K_n \to K \\ L_n \to L \end{array}\right\} \Rightarrow aK_n + \beta L_n \to aK + \beta L$ για $a, \beta \in \mathbb{R}$

⑥ Αν $(K_n)_n$ κυρτά και $K_n \to K$, τότε το K = κυρτό

<u>Συμβολισμός:</u> $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^d) = \{K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d) : K = \text{κυρτό}\}$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $K, L \in \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^d)$, Τότε $\delta(K,L) = \max\limits_{\|u\|=1} \{|h_K(u) - h_L(u)|\}$

όπου $h_K(u) = \max\{\langle x, u\rangle : x \in K\}$, συνάρτηση στήριξης

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $a = \delta(K,L) \geq 0$

Τότε $K \subseteq L + aB(0,1)$, έστω $u \in \mathbb{R}^d$, $\|u\|=1$

Τότε $h_K(u) \leq h_{L+aB(0,1)}(u) = h_L(u) + a\underbrace{h_{B(0,1)}(u)}_{=1} = h_L(u) + a$

Ομοίως, $h_L(u) \leq h_K(u) + a \quad \forall u \in \mathbb{R}^d, \|u\|=1$ (αφού το u ήταν τυχόν)

$\Rightarrow \max\{|h_K(u) - h_L(u)| : \|u\|=1\} \leq a = \delta(K,L)$

Έστω τώρα $\beta = \max\{|h_K(u) - h_L(u)| : \|u\|=1\}$

Έστω $u : \|u\|=1$ Τότε $h_L(u) - \beta \leq h_K(u) \leq h_L(u) + \beta$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} K \subseteq L + \beta B(0,1) \\ L \subseteq K + \beta B(0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \beta \geq \delta(K,L)$

(Χρησιμοποιήσαμε ότι $A \subseteq B \Leftrightarrow h_A(u) \leq h_B(u)$, $\|u\|=1$)

Θεώρημα Επιλογής του Blaschke

(i) Αν $X \subseteq \mathbb{R}^d$ συμπαγές, τότε $< \mathcal{H}_c(X), \delta >$ είναι συμπαγές

(ii) $< \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^d), \delta >$ είναι πλήρης μετρικός χώρος (τοπικά συμπαγής)

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε το θεώρημα Arzela-Ascoli και μία άσκηση.

(Υπάρχει το εξής θεώρημα: X = συμπαγές τότε $< \mathcal{H}(X), \delta >$ συμπαγής $\mu.\chi$)

Θεώρημα Arzela-Ascoli

Έστω Y συμπαγής μετρικός χώρος, $C(Y) = \{f : Y \to \mathbb{R} \text{ συνεχής}\}$, $\|f\|_\infty = \max\{|f(y)| : y \in Y\}$. Έστω ακόμα $\mathcal{F} \subseteq C(Y)$. Τ.Α.Ε.Ι.

(i) $\mathcal{F}$ συμπαγές

(ii) $\mathcal{F}$ ισοσυνεχές, κλειστό και φραγμένο

($\mathcal{F}$ ισοσυνεχές $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: αν $\rho(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ $\forall f \in \mathcal{F}$)

Άσκηση/Λήμμα

Έστω $K \subseteq B(0,R)$. Τότε $|h_K(u) - h_K(v)| \leq R\|u-v\|$, $u,v \in \mathbb{R}^d$

$\exists x_1 \in K : h_K(u) = \langle x_1, u \rangle$, $\exists x_2 \in K : h_K(v) = \langle x_2, v \rangle \geq \langle x_1, v \rangle$. $h_K(u) - h_K(v) \leq \langle x_1, u-v \rangle \leq$

$\underset{C-S}{\leq} \|x_1\| \|u-v\| \leq R\|u-v\|$

Απόδειξη Θεωρήματος Blaschke

(i) Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε $X = B(0,1)$

(δ αμετάβλητη στις μετατοπίσεις και $K_n \to K \Leftrightarrow \lambda K_n \to \lambda K$ για $\lambda \neq 0$)

Έστω $K \subseteq B(0,1)$

Τότε η συνάρτηση στήριξης h_K είναι θετικά ομογενής + κυρτή. Άρα, h_K είναι συνεχής. $S^{d-1} = \{x : \|x\| = 1\}$

Έστω τώρα $\mathcal{F} = \{\bar{h}_K : K \subseteq B(0,1), \bar{h}_K = h_K|_{S^{d-1}}\} \subseteq C(S^{d-1})$

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές.

- Έστω $\bar{h}_K \in \mathcal{F}$ / $|\bar{h}_K(u)| \leq 1$, $\|u\| = 1$ (από Άσκηση/Λήμμα, $v=0$)

$\mathcal{F}$ φραγμένο $\|\cdot\|_\infty$ / $\mathcal{F}$ = ισοσυνεχές: $|\bar{h}_K(u) - \bar{h}_K(v)| \leq 1 \cdot \|u-v\|$, $u,v \in S^{d-1}$.

Μένει να δείξουμε ότι $\mathcal{F}$ = κλειστό

Έστω $\bar{h}_{K_n} \rightrightarrows f \in C(S^{d-1})$

$\bar{h}_{K_n}(u) \xrightarrow[n]{} f(u)$, $u \in S^{d-1}$

$$\tilde{f}(v) = \begin{cases} 0, & v = 0 \\ \|v\| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right), & v \neq 0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ θετικά ομογενής, $\underbrace{h_{K_n}(v)}_{\text{κυρτές}} \to \tilde{f}(v)$, $v \in \mathbb{R}^d$ (εύκολα)

$\Rightarrow \tilde{f}$ = κυρτή

Τότε $\tilde{f}$ θετικά ομογενής + κυρτή. Άρα $\exists$ K = κυρτό + συμπαγές ώστε $\tilde{f} = h_K$

Τότε $\bar{h}_{K_n} \rightrightarrows \bar{h}_K$

~~Όμως~~ Τότε $K_n \xrightarrow{\delta} K$ και $K_n \subseteq B(0,1) \Rightarrow K \subseteq B(0,1)$

Άρα, $\bar{h}_K \in \mathcal{F}$

Άρα, δείξαμε, από το θεώρημα Arzela-Ascoli ότι το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές $\subseteq C(S^{d-1})$

Έστω τώρα $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $K_n \in \mathcal{H}_c(B(0,1))$. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $(h_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ συνεχείς του $\mathcal{F}$ = συμπ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ υπακολουθία $\bar{h}_{K_{n_\nu}} \overset{\nu}{\rightrightarrows} \bar{h}_K \in \mathcal{F} \Rightarrow \underline{\underline{K_{n_\nu} \xrightarrow{\delta} K}}$

<u>Και έχουμε</u> το ζητούμενο.

(ii) $\langle \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^d), \delta \rangle$ πλήρης μ.χ.

Έστω $(K_n)_n$ βασική

Δηλ. $(K_n)_n$ φραγμένη $\Rightarrow \exists A \in \mathcal{H}_c : \delta(A, K_n) \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\overset{*}{\Rightarrow} K_n \subseteq A + MB(0,1) = B$-συμπαγές

Τότε $\exists K_{n_\nu} \xrightarrow{\delta} K \in \mathcal{H}_c$

Τότε $K_n \xrightarrow{\delta} K$

(*) Εάν είχαμε $\langle \mathcal{H}_c(X), \delta \rangle$ τότε $K_n \subseteq A + M B_X(0,1)$

Η $B_X(0,1)$ είναι κλειστή+φραγμένη στο σύνολο X, όχι κατ' ανάγκη συμπαγής στο X / Δεν θα είχαμε ότι $A + M B_X(0,1)$ συμπαγής.

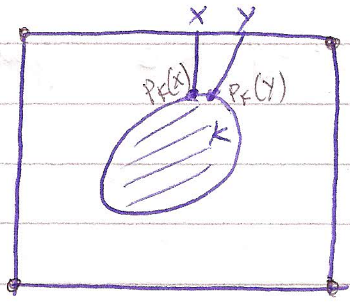
Πρόταση:
Έστω $K \in \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^d)$. Τότε $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P =$ πολύτοπο, $P \subseteq K \subseteq P + \varepsilon B(0,1)$
$(\Rightarrow \delta(K,P) \leq \varepsilon)$
Άρα το σύνολο των πολυτόπων είναι πυκνό στο $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^d)$.

Απόδειξη
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists^{\text{ow}}$ $x_1, \ldots, x_k$: $K \subseteq B(x_1,\varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_k,\varepsilon) =$
$= \{x_1, \ldots, x_k\} + \varepsilon B(0,1)$, $x_i \in K$.
Έστω $P = \operatorname{con}\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq K \subseteq \operatorname{con}\{x_1, \ldots, x_k\} + \varepsilon B(0,1)$
$K =$ κυρτό

Όγκος συνόλου
Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$, $\lambda_d^*(K) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} V_d(B_i) : K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,\ B_i = \text{ορθογώνιο} \right\}$

$B = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d] \to$ ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^d$
Ορίζουμε $V_d(B) := (b_1 - a_1) \ldots (b_d - a_d)$

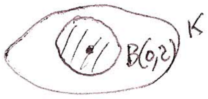
Αν K συμπαγές ($\Rightarrow$ μετρ.), $V_d(K) = \lambda_d(K)$
Αν $K =$ κυρτό, $\varepsilon \sigma K \neq \emptyset \Rightarrow \lambda_d(\operatorname{bd} K) = 0$



$\|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x - y\|$, $x, y \in \operatorname{bd} B$, $K \subseteq \varepsilon\sigma B$, $B =$ ορθογώνιο.
Άρα $\lambda_d(\operatorname{bd} K) \leq \lambda_d(\operatorname{bd} B) = 0$
$\varepsilon\sigma K \neq \emptyset \Leftrightarrow \dim K = d \Leftrightarrow V_d(K) > 0$

Θεώρημα: Έστω $K_n, K \in \mathcal{H}_c$ με $K_n \xrightarrow{\delta} K$. Τότε οι όγκοι
$V_d(K_n) \xrightarrow[n]{} V_d(K)$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $0 \in \operatorname{ri} K$. ($\delta$, V_d αναλλοίωτα στις μετατοπίσεις)
• 1^η περίπτωση: $0 \in \varepsilon\sigma K$, $\dim K = d$, $V_d(K) > 0$
Έστω $B(0,r) \subseteq K$. Έστω ακόμα $\varepsilon > 0$.



Τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : K_n \subseteq K + \varepsilon B(0,1) \ \forall n \geq n_0$.

$\Rightarrow K_n \subseteq K + \frac{\varepsilon}{r} B(0,r) \subseteq K + \frac{\varepsilon}{r} K \underset{K = \text{κυρτό}}{=} (1+\frac{\varepsilon}{r}) K$

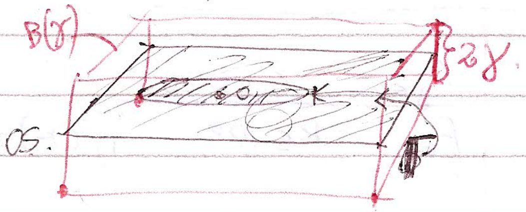
Παίρνουμε $(1-\frac{\varepsilon}{r})K + \frac{\varepsilon}{r} K = K \subseteq K_n + \frac{\varepsilon}{r} B(0,r) \subseteq K_n + \frac{\varepsilon}{r} K$ (K−κυρτό) (ισχύει Αντιποίηση)

Άρα $(1-\frac{\varepsilon}{r}) K \subseteq K_n \subseteq (1+\frac{\varepsilon}{r}) K \ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow V_d((1-\frac{\varepsilon}{r})K) = (1-\frac{\varepsilon}{r})^d V_d(K) \leq V_d(K_n) \leq (1+\frac{\varepsilon}{r})^d V_d(K) \ \forall n \geq n_0$

Άρα $\lim_{n\to\infty} V_d(K_n) = V_d(K)$

2η περίπτωση $\quad \text{εσ} K = \emptyset \Rightarrow V_d(K) = 0 \,/\, 0 \in \text{ri}\, K$



Άρα $\dim \text{aff}(K) \leq d-1$.

Έστω $H \supseteq K$, H $(d-1)$-υπόχωρος.

και Γ = ορθογώνιο:

$K + B_H(0,1) \subseteq \Gamma$ / Έστω $\varepsilon > 0$.

Έστω $0 < \gamma < \min\{1, \frac{\varepsilon}{2V_{d-1}(\Gamma)}\}$ και $B(\gamma) = \{x + tu : x \in \Gamma, |t| \leq \gamma\}$

$u \perp H$, $\|u\| = 1$

Τότε $K_n \subseteq K + \gamma B(0,1)$ για $n \geq n_0$, $K + \gamma B(0,1) \subseteq B(\gamma)$

$K_n \subseteq B(\gamma)$ για $n \geq n_0$.

Άρα: $V_d(K_n) \leq V_d(B(\gamma)) = V_{d-1}(\Gamma) \cdot 2\gamma < \varepsilon$ για $n \geq n_0$.

Άρα $\lim_{n\to\infty} V_d(K_n) = 0 = V_d(K)$.

Σημ: Έστω $K_n \xrightarrow{\delta} K$.

Εάν $\dim K = d$ τότε $\dim K_n = d$ για $n \geq n_0$

Εάν $\dim K_n = d$ για $n \geq n_0 \not\Rightarrow \dim K = d$.

$B(0, \frac{1}{n}) \xrightarrow{\delta} \{0\}$