Μάθημα 11

Πολικό σύνολο - Διπολικό Θεώρημα

Έστω $A\neq\emptyset$, $A\subseteq\mathbb{R}^d$

$A^\circ=\{u\in\mathbb{R}^d : \langle u,x\rangle\le 1,\ x\in A\}$ $\rightarrow$ πολικό σύνολο του A

A° = κυρτό + κλειστό + $0\in A^\circ$

Ασκήσεις

1) Αν $A\subseteq B \Rightarrow B^\circ\subseteq A^\circ$

2) $(\lambda A)^\circ=\frac{1}{\lambda}A^\circ$, $\lambda>0$

3) $A=A^\circ \iff A=B_2(0,1)$

Θεώρημα (Διπολικό Θεώρημα)

Έστω $A\neq\emptyset$, $A\subseteq\mathbb{R}^d$. Τότε $A^{\circ\circ}=\overline{\mathrm{conv}}(A\cup\{0\})$. Τότε, άμεσα προκύπτει ότι αν K κυρτό + κλειστό + $(0\in K) \Rightarrow K=K^{\circ\circ}$

Απόδειξη

Έστω $a\in A\cup\{0\}$

Αν $a=0 \Rightarrow 0\in(A^\circ)^\circ$

Έστω $a\in A$. Τότε $\langle a,u\rangle\le 1$ $\forall u\in A^\circ$

Άρα $a\in(A^\circ)^\circ$

Άρα $A\cup\{0\}\subseteq A^{\circ\circ} \Rightarrow \overline{\mathrm{conv}}(A\cup\{0\})\subseteq \overline{\mathrm{conv}}\,A^{\circ\circ}=A^{\circ\circ}$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό υποθέτουμε ότι $\exists\, x_0\in A^{\circ\circ}, x_0\notin\overline{\mathrm{conv}}(A\cup$

Άρα (από διαχωριστικό Θεώρημα), $\exists\, u\neq 0, c\in\mathbb{R}: \langle a,u\rangle < c < \langle x_0,u$ (*)

$\forall a\in A\cup\{0\}$

Για $a=0 \rightarrow c>0$

Άρα $\langle a,\frac{u}{c}\rangle<1$ $\forall a\in A$

Από τον ορισμό του πολικού συνόλου, $\frac{u}{c}\in A^\circ$

Έχουμε $\frac{u}{c} \in A^o$, $x_0 \in A^{oo} \Rightarrow \langle x_0, \frac{u}{c} \rangle \leq 1$

Άτοπο, αφού έχουμε από την (†) ότι $\langle x_0, \frac{u}{c} \rangle > 1$

Τελικά, έχουμε ότι

$$\underline{\underline{A^{oo} = \overline{conv}(A \cup \{0\})}}$$

<u>Σχέση μεταξύ συνάρτησης στάθμης, συνάρτησης στήριξης</u>

<u>Υπενθύμιση</u>

- Αν K = κυρτό + κλειστό ($0 \in \varepsilon\sigma K$) είχαμε ορίσει
  $g_K(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$ (Συνάρτηση στάθμης / Συναρτησιοειδές Minkowski)

  $g_K \geq 0$, g_K θετικά ομογενής και κυρτή και
  $K = \{x \in \mathbb{R}^d : g_K(x) \leq 1\}$

  Ακόμα, είχαμε πει ότι αν $f \geq 0$, θετικά ομογενής + κυρτή και $L = \{x : f(x) \leq 1\}$, τότε $g_L \equiv f$

- Αν K = κυρτό + συμπαγές, τότε
  $h_K(u) = \max\limits_{x \in K} \langle x, u \rangle \to$ Συν. Στήριξης, $u \in \mathbb{R}^d$

  h_K θετικά ομογενής + κυρτή

<u>Άσκηση</u>

(i) $h_{\lambda K} = \lambda h_K$, $\lambda > 0$

(ii) $h_{K_1 + K_2} = h_{K_1} + h_{K_2}$ όπου K_1, K_2 κυρτά + συμπαγή.

(iii) $K_1 \subseteq K_2 \Leftrightarrow h_{K_1} \leq h_{K_2}$
($K_1 = K_2 \Leftrightarrow h_{K_1} = h_{K_2}$)

(iv) Αν A, B, Γ = κυρτά + συμπαγή και $A + \Gamma \subseteq B + \Gamma$
Τότε $A \subseteq B$ (Κανόνας απλοποίησης)

Για το (iv) έχουμε

$h_{A+\Gamma} = h_A + h_\Gamma \le h_{B+\Gamma} = h_B + h_\Gamma \Rightarrow h_A \le h_B \Rightarrow A \subseteq B$

- Εάν K = κυρτό + συμπαγές + $0 \in \varepsilon\sigma K$ τότε
  $h_K \ge 0$, θετικά ομογενής + κυρτή

Άρα, η h_K είναι συνάρτηση στάθμης του συνόλου
$\{u \in \mathbb{R}^d : h_K(u) \le 1\} = \{u \in \mathbb{R}^d : \langle u, x\rangle \le 1, x \in K\} = K^\circ$

Άρα

$$\boxed{g_{K^\circ} \equiv h_K}$$

Θεώρημα: Έστω ότι K = κυρτό + συμπαγές + $(0 \in \varepsilon\sigma K)$. Τότε, το K = (κυρτό + κλειστό) + φραγμένο, $h_{K^\circ} = g_K$

Απόδειξη

$0 \in \varepsilon\sigma K$, $\exists\, B_2(0,r) \subseteq K \Rightarrow K^\circ \subseteq B_2^\circ(0,r) = \frac{1}{r} B_2^\circ(0,1) = \frac{1}{r} B_2(0,1)$

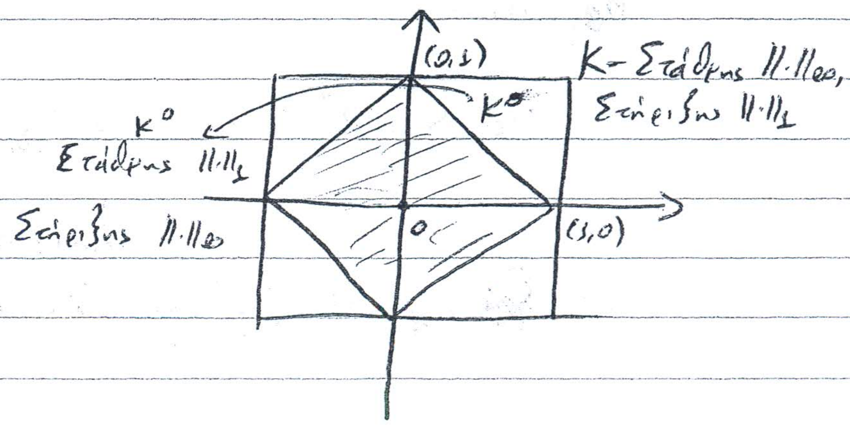
Άρα K° φραγμένο ($\Rightarrow$ ορίζεται η h_{K°)

Ακόμα, αφού K = κυρτό + κλειστό, $\overline{\mathrm{conv}}\, K = K^{\circ\circ} = K$

Άρα $g_K = g_{(K^\circ)^\circ} = h_{K^\circ}$

Πόρισμα

Έστω K = κυρτό + συμπαγές + συμμετρικό + $(0 \in \varepsilon\sigma K)$. Τότε, η g_K είναι νόρμα με μοναδιαία σφαίρα το K. Ακόμα, το K° = κυρτό + συμπαγές + συμμετρικό + $(0 \in \varepsilon\sigma K)$ ορίζει την νόρμα $g_{K^\circ} = h_K$



Παράδειγμα

$\mathbb{R}^d$, $1<p<+\infty$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{1/p}$, $x=(x_1,\dots,x_d)$

$B_p = B_p(0,1) = \{x : \|x\|_p \le 1\}$, $g_{B_p} = \|\cdot\|_p$ / Ζητάμε το B_p°

Ζητάμε h_{B_p}

Αν βρούμε την h_{B_p} το $B_p^\circ = \{u : h_{B_p}(u) \le 1\}$

$x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, $x_1^p + \dots + x_d^p = 1$, $x_i \ge 0$ (για ευκολία)

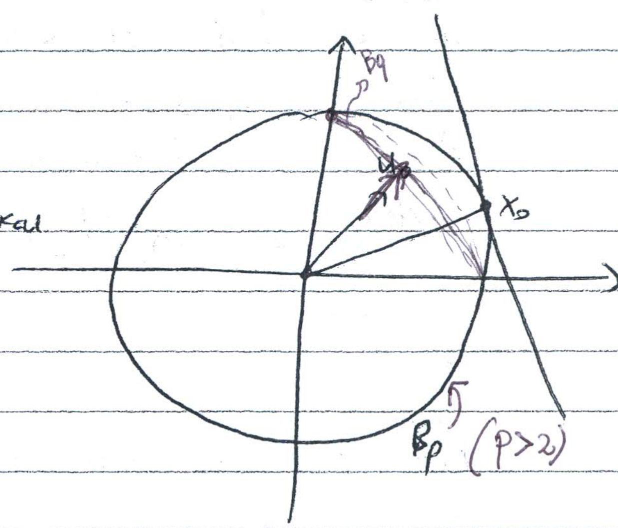
Έστω $u_0 = \nabla g_{B_p}(x_0) = (x_1^{p-1}, x_2^{p-1}, \dots, x_d^{p-1})$

Παρατηρούμε ότι $\langle u_0, x_0 \rangle = 1$

Ξέρουμε $x_1^p + x_2^p + \dots + x_d^p = 1 \Rightarrow (x_1^{p-1})^{p/p-1} + \dots + (x_d^{p-1})^{p/p-1} = 1$

και $\frac{p}{p-1} > 1 \Rightarrow \|u_0\|_{\frac{p}{p-1}} = 1$

Έστω $q = \frac{p}{p-1}$, $\|u_0\|_q = 1$



Θεωρούμε τώρα την $B_q(0,1)$ και έστω $u \in B_q(0,1)$

$\langle \underset{B_p}{x_0}, \underset{B_q}{u} \rangle \le \|x_0\|_p \|u\|_q \le 1$

$\langle u_0, x_0 \rangle = 1$, $u_0 \in B_q$

$\langle u, x_0 \rangle \le 1$, $u \in B_q$

$h_{B_q}(x_0) = 1$

Για $x_0' \in \mathbb{R}^d$, $x_0' \ne 0 \to h_{B_q}\left(\frac{x_0'}{\|x_0'\|_p}\right) = 1$,

$h_{B_q}(x_0') = \|x'\|_p$

$\Rightarrow \quad h_{B_q}(x) = g_{B_p}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

Συνέχεια

$h_{B_q} = \delta_{B_p} \underset{\text{(θεώρημα)}}{=} h_{B_p^o} \Rightarrow \boxed{B_p^o = B_q}$

$B_p(0,1) = \text{con}\{x : x_1^p + \dots + x_d^p = 1\}$

$B_p^o(0,1) = B_q(0,1) = \text{con}\{\nabla(\|x\|_p) : \|x\|_p = 1\}$

Ισχύει και $B_1^o(0,1) = B_\infty(0,1)$ (άσκηση)

Πολύτοπα - Πολύεδρα

P πολύτοπο, $P = \text{con}\{x_1', x_2', \dots, x_n'\}$ = συμπαγές + κυρτό

Από το θεώρημα Minkowski

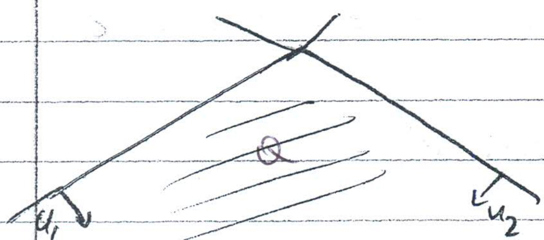
$$P = \text{con}(\text{ext}P) = \text{con}\{x_1, \dots, x_n\} \quad (\text{ext}P = \{x_1, \dots, x_n\})$$

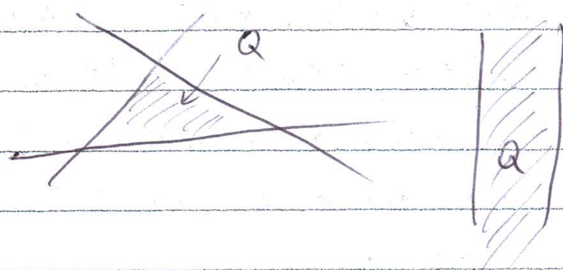
Αν $\dim P = k$, $|\text{ext}P| \geq k+1$

Q πολύεδρο: $Q = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u_i \rangle \leq c_i \quad i = 1, \dots, n\}$

$u_i \in \mathbb{R}^d$, $c_i \in \mathbb{R}$ / Q πιθανόν να είναι $\emptyset$

Q = κυρτό + κλειστό





Άλλη γραφή πολυέδρου:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$

$u_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{di})$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{d1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{d2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & \dots & \dots & a_{dn} \end{pmatrix}$$

$x\in\mathbb{R}^d$: $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{d1}x_d \le c_1$

$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{d2}x_d \le c_2$

$\vdots$

$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \dots + a_{dm}x_d \le c_m$

/ $Ax \le c$

Θεώρημα (Βασικό θεώρημα πολυτόπων): Έστω $P\subseteq \mathbb{R}^d$, $P\neq\emptyset$. Το P είναι φραγμένο πολύεδρο $\iff$ P πολύτοπο / ($\Rightarrow$) Χρήση Θ. Minkowski ($\Leftarrow$) Διπολικό θεώρημα.

Πόρισμα:

$P=\{x: Ax\le c\}\neq\emptyset$, φραγμένο

$f(x)=\beta_1x_1+\dots+\beta_dx_d$

Τότε, $\exists\, x_1,x_2\in \text{ext}\,P$: $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$: $x\in P$

Λήμμα: Έστω P = φραγμένο πολύεδρο, $y\in \text{bd}\,P$, $I(y)=\{i\in\{1,\dots,n\}: \langle y,u_i\rangle = c_i\}$. Τότε $y\in\text{ext}\,P \iff \text{span}\{u_i: i\in I(y)\}=\mathbb{R}^d$ / Άρα, αν $y\in\text{ext}\,P$, $|I(y)|\ge d$.

Απόδειξη Λήμματος

($\Leftarrow$) $y=(1-\lambda)y_1+\lambda y_2$, $y_1,y_2\in P$, $0<\lambda<1$

$i\in I(y)$, $\langle y,u_i\rangle=(1-\lambda)\langle y_1,u_i\rangle+\lambda\langle y_2,u_i\rangle\le(1-\lambda)c_i+\lambda c_i=c_i \xRightarrow{\lambda\in(0,1)}$

$\langle y_1,u_i\rangle=\langle y_2,u_i\rangle$ $i\in I(y)$

$\langle y_1-y_2,u_i\rangle=0$, $\text{span}\{u_i: i\in I(y)\}=\mathbb{R}^d$

$\Rightarrow y_1=y_2$

($\Rightarrow$) Έστω $\text{span}\{u_i: i\in I(y)\}\subsetneq\mathbb{R}^d$

Άρα, $\exists\, z\neq 0$: $\langle z,u_i\rangle=0$, $i\in I(y)$

$i\in I(y)$, $\langle y\pm\varepsilon z,u_i\rangle=c_i$, $\varepsilon>0$ (1)

$j\in\{1,2,\dots,n\}\setminus I(y)$, $\langle y,u_j\rangle<c_j$

Άρα $\exists\,\varepsilon_0>0$: $\langle y\pm\varepsilon_0 z,u_j\rangle<c_j$ $\forall j\in\{1,\dots,n\}\setminus I(y)$. (2)

Τότε $y\pm\varepsilon_0 z\in P$ (από (1)+(2)).

$y=\frac{1}{2}\underbrace{(y+\varepsilon_0z)}_{\in P}+\frac{1}{2}\underbrace{(y-\varepsilon_0z)}_{\in P}\Rightarrow y\notin \text{ext}\,P$

Άτοπο

Απόδειξη Θεωρήματος

($\Rightarrow$) Έστω P= φραγ. πολύεδρο

Ξέρουμε ότι P πολύτοπο $\Leftrightarrow |ext P| < +\infty$

P= φραγ. πολύεδρο $\Rightarrow$ P συμπαγές + κυρτό. Από το Θ. Minkowski

$P = con(ext P)$

Αν $y \in ext P$, αντιστοιχεί u_i: $span\{u_i : i \in I(y)\} = \mathbb{R}^d$

Οι βάσεις που μπορούμε να δημιουργήσουμε από τα $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

είναι το πολύ $\binom{n}{d}$ $\Rightarrow |ext P| \le \binom{n}{d} < +\infty$

($\Leftarrow$)

Έστω ότι το P είναι πολύτοπο,

$P = con\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $ext P = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

$P^o = \{u : \langle x, u \rangle \le 1 \;\; x \in P\} \underset{(εύκολα)}{=} \{u : \langle u, x_i \rangle \le 1, \; i = 1, \dots, m\}$

Άρα το P^o = πολύεδρο (από τον ορισμό του πολυέδρου)

Υποθέτουμε ότι $0 \in \varepsilon \sigma P$

Τότε P^o = φραγμένο / P^o = πολύεδρο + φραγ. $\Rightarrow$ (από το "$\Rightarrow$" του θεωρήματος)

~~Άρα~~ P^o = πολύτοπο

Και άρα $\underset{P}{\underset{\shortparallel}{P^{oo}}}$ = φραγμένο πολύεδρο (βάζοντας (P^o) στη θέση του P στον αρχικό συλλογισμό)

Πόρισμα: Έστω P, Q πολύτοπα. Τότε $P \cap Q$, $\lambda P + \mu Q$ πολύτοπα.
($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

Ακόμα, αν P= πολύτοπο, $L = H + x_0$, H= διανυσματικός υπόχωρος

Τότε $P \cap L$ πολύτοπο

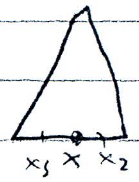
Εξίσωση Euler (Poincaré 1899)

P= πολύτοπο

$F \subseteq P$ έδρα $\Leftrightarrow$ $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in f$ για κάποια $x_1, x_2 \in P$, $0 < \lambda < 1$,

τότε $x_1, x_2 \in f$

k-έδρα, αν $\dim f = k$



X_0: 0-έδρα ⟺ $x_0 \in extP$ / f_0 = αριθμός ακραίων σημείων

1-έδρα ακμή / f_1 = αριθμός ακμών, κοκ.

Εξίσωση Euler:

$f_{-1}=1,\ f_d=1$ / $\underline{f_{-1}+f_0+f_1-f_2+\dots+(-1)^{d+1}f_d=0}$

π.χ.

$d=3 \to f_0=v,\ f_1=e,\ f_2=f$

$1-v+e-f+1=0 \Rightarrow \underline{\underline{v-e+f=2}}$

Άσκηση: Έστω $r(t)=(t,t^2,\dots,t^d)$, $t\in\mathbb{R}$

$t_0<t_1<\dots<t_d$

Τότε τα $\{\tilde{r}(t_0),\dots,\tilde{r}(t_d)\}=A$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και κάθε έδρα του πολυτόπου $P=conA$ είναι simplex