Δευτέρα 8 Απριλίου 2013 — Κυρτή Ανάλυση

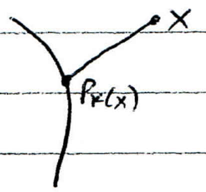
Μάθημα 8

[Υπενθύμιση:

X = χώρος Hilbert, K = κλειστό + κυρτό, $x \notin K$

Τότε υπάρχει (X = πλήρης χώρος με $\langle , \rangle$) μοναδικό

$P_K(x) \in K$ (K = κλειστό) τ.ω. $d(x,K) = \|x - P_K(x)\|$



$P_K : X \to K$ μετρική προβολή

$\|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$

Ακόμα, δείξαμε ότι $y_0 = P_K(x) \Leftrightarrow \langle y - y_0, x - y_0 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in X$]

Υπερεπίπεδα στο X (= Hilbert)

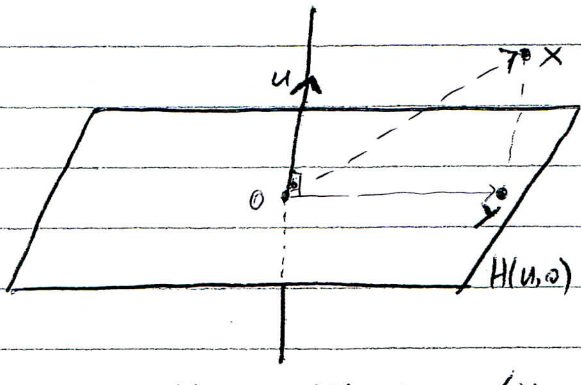
Έστω $u \in X$, $\|u\| = 1$. Παίρνουμε ακόμα

$H(u,0) = \{x \in X : \langle x, u \rangle = 0\} \to$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος το

Τότε $X = H(u,0) \oplus \langle u \rangle$ ($u \perp H(u,0)$)

Ο $H(u,0)$ λέγεται <u>υπερεπίπεδο συνδιάστασης 1</u>

(Αν $X = \mathbb{R}^d$, ο $H(u,0)$ έχει διάσταση $(d-1)$ και συνδιάσταση 1)



Παίρνουμε $y = x - \langle x, u \rangle u$, $\langle y, u \rangle = 0$, $y \in H(u,0)$

$z = \langle x, u \rangle u \in \langle u \rangle$

Τότε $x = y + z$, $y \in H(u,0)$, $z \in \langle u \rangle$

Ακόμα, θέλουμε $H(u,0) \cap \langle u \rangle = \{0\}$

Έστω $x \in H(u,0) \cap \langle u \rangle$. Τότε $x = \lambda u$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$ και ακόμα

$x \in H(u,0) \Rightarrow \langle x, u \rangle = 0 \Rightarrow \langle \lambda u, u \rangle = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$. Άρα $x = 0$

Παίρνουμε τώρα $u \in X$, $\|u\|=1$, $c \in \mathbb{R}$ και θέτουμε
$H(u,c) = \{x \in X : \langle x,u \rangle = c\}$ → κλειστό + κυρτό (όχι γρ-
κός υπόχωρος για $c \neq 0$

Τότε $H(u,c) = x_0 + H(u,0)$ για $x_0 \in H(u,c)$
Το $H(u,c)$ καλείται και αυτό υπερεπίπεδο $\perp u$

Ορίζουμε επίσης $H^+(u,c) = \{x \in X : \langle x,u \rangle \leq c\}$, $H^-(u,c) = \{x \in X : \langle x,u \rangle$

Άσκηση
Θεωρούμε $u \in X$, $\|u\|=1$, το σύνολο $H(u,c)$ και ένα $x \in X$
Τότε $d(x, H(u,c)) = |\langle x,u \rangle - c|$

Απόδειξη
Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $c=0$
Αν $y \in H(u,0)$ τότε $\langle y,u \rangle = 0$.
Τότε $|\langle x,u \rangle| = |\langle x-y,u \rangle| \underset{C-S}{\leq} \|x-y\|$ $\forall y \in H(u,0)$

Άρα $|\langle x,u \rangle| \leq d(x, H(u,0)) = \inf\{\|x-y\| : y \in H(u,0)\}$
$y = x - \langle x,u \rangle u \in H(u,0)$
$d(x, H(u,0)) \leq \|x-y\| = |\langle x,u \rangle|$
Άρα, τελικά $d(x, H(u,0)) = |\langle x,u \rangle|$

- Αν τώρα $c \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in H(u,c)$, τότε
$d(x, H(u,c)) = d(x-x_0, H(u,c)-x_0 = H(u,0)) = |\langle x-x_0,u \rangle| = |\langle x,u \rangle -$

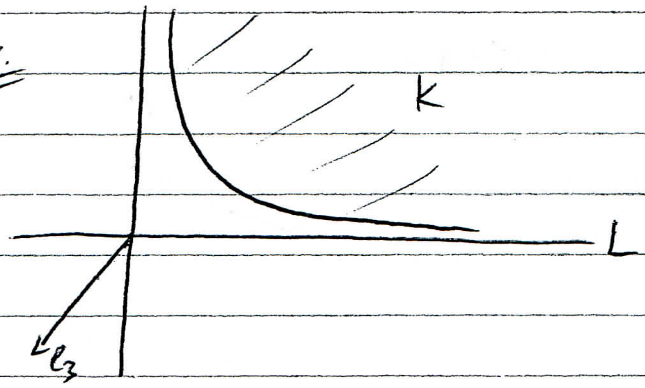
Διαχωρίζον υπερεπίπεδο

Ορισμοί: Έστω $K, L \subseteq X$, $H(u,c)$ ένα υπερεπίπεδο
(a) K, L διαχωρίζονται από το $H(u,c)$ ⟺ $\sup\limits_{x \in K} \langle x,u \rangle \leq c \leq \inf\limits_{y \in L} \langle y,u$
$K \subseteq H^+(u,c)$, $L \subseteq H^-(u,c)$

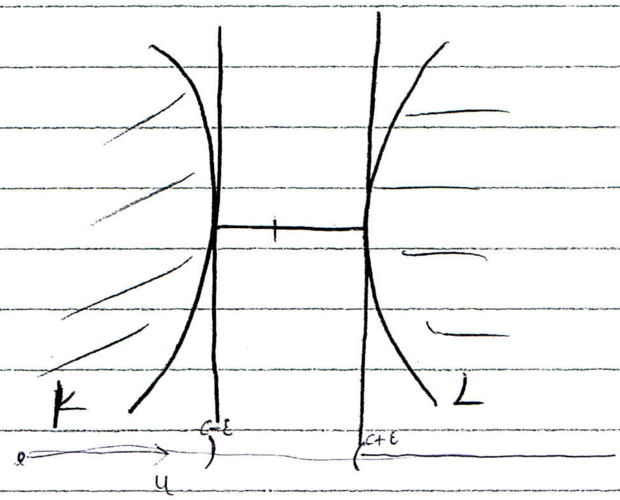
Ο ορισμός (α) δεν είναι τόσο "καλός". Για αυτό παίρνουμε τον εξής ορισμό:

(β) K, L <u>διαχωρίζονται γνήσια</u> $\iff \exists\, H(u,c)$ που τα διαχωρίζ[ει] αλλά $K \not\subseteq H(u,c)$ ή $L \subseteq H(u,c)$

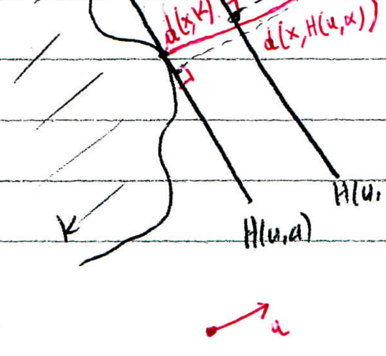
<u>π.χ.</u>



(γ) K, L <u>διαχωρίζονται αυστηρά</u> από το $H(u,c)$ αν $\exists\, \varepsilon>0$ ώστε
$\sup_{y\in K}\langle y,u\rangle \le c-\varepsilon < c+\varepsilon \le \inf_{y\in L}\langle y,u\rangle$



<u>Άσκηση</u>: Έστω $K \subseteq X$, $x \notin K$ που διαχωρίζονται γνήσια από ένα $H(u$[…]
Τότε αν $a=\sup_{y\in K}\langle y,u\rangle \le c \le \langle x,u\rangle$ τότε $d(x,H(u,c)) \le d(x,H(u,a))$



(Αφήνεται ως άσκηση με υπ[…]
$d(x,H(u,c'))=|\langle x,u\rangle - c'|$

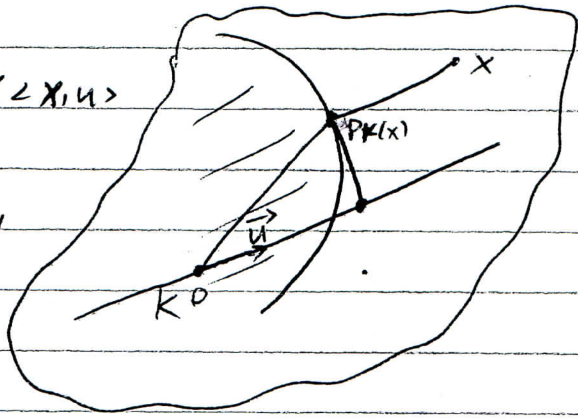
Θεώρημα: Έστω $X=$ χώρος Hilbert, $K=$ κλειστό + κυρτό, $x \notin K$

Έστω $P_K(x) \in K$ $(x \neq P_K(x))$ και $u = \dfrac{x-P_K(x)}{\|x-P_K(x)\|}$

Τότε: $\sup\limits_{y\in K} \langle y,u\rangle = \langle P_K(x),u\rangle$ και $d(x,K)=\|x-P_K(x)\| = \langle x,u\rangle - \langle P_K(x),u\rangle$

και $\sup\limits_{y\in K}\langle y,u\rangle = \langle P_K(x),u\rangle < \langle x,u\rangle$

και άρα x, K διαχωρίζονται αυστηρά



Απόδειξη

Έστω $y\in K$. Τότε $\langle y-P_K(x), x-P_K(x)\rangle \le 0 \Rightarrow \langle y-P_K(x), u\rangle \le 0$

διαιρούμε με $\|x-P_K(x)\|$

$\Rightarrow a = \sup\limits_{y\in K}\langle y,u\rangle \le \langle P_K(x),u\rangle$. Όμως αν $y=P_K(x)$ έχουμε ισότητ

Επομένως $\sup\limits_{y\in K}\langle y,u\rangle = \langle P_K(x),u\rangle$

Από τον ορισμό του $P_K(x)$, $d(x,K)=\|x-P_K(x)\| =$

$$= \left\langle x-P_K(x), \frac{x-P_K(x)}{\|x-P_K(x)\|}\right\rangle = \langle x-P_K(x), u\rangle =$$

$= \langle x,u\rangle - \langle P_K(x),u\rangle$

Τέλος $d(x,K)>0$ διότι $x\notin K \Rightarrow \langle x,u\rangle - \langle P_K(x),u\rangle > 0$

$\Rightarrow \langle x,u\rangle - \sup\limits_{y\in K}\langle y,u\rangle > 0 \Rightarrow \underbrace{\sup\limits_{y\in K}\langle y,u\rangle}_{= \langle P_K(x),u\rangle} < \langle x,u\rangle$

Σημείωση: Εάν $u' \in X$, $\|u'\| = 1$ και $d(x, K) = \langle x, u' \rangle - \sup_{y \in K} \langle y, u' \rangle$ τότε $u' = u$
(Έπεται εύκολα με την ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Διαχωρισμός κυρτών συνόλων σε Hilbert χώρους

Έστω A, B, $A \cap B = \emptyset$.
Αν $A = \{x\}$, B = κλειστό + κυρτό, τότε από το προηγο[ύμενο]
Θεώρημα διαχωρίζονται αυστηρά

Λήμμα
Τα A, B διαχωρίζονται (αυστηρά, γνήσια) τότε και μόνο αν το 0, $A - B$ διαχωρίζονται (αυστηρά, γνήσια)

Απόδειξη
($\Longrightarrow$) Έστω ότι $H(u, c)$ διαχωρίζει αυστηρά τα A, B. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$: $\langle x, u \rangle \leq c - \varepsilon < c + \varepsilon \leq \langle y, u \rangle$ για $x \in A$, $y \in B$
Τότε $\langle x - y, u \rangle = \langle x, u \rangle - \langle y, u \rangle \leq (c - \varepsilon) - (c + \varepsilon) = \underset{c}{(-\varepsilon)} - \varepsilon < \underset{c}{(-\varepsilon)} + \varepsilon = 0$
Άρα τα $0, A - B$ διαχωρίζονται αυστηρά

($\Longleftarrow$) Έστω ότι $\exists \varepsilon > 0$: $\langle x - y, u \rangle \leq -2\varepsilon < \langle 0, u \rangle$, για $x - y \in A - B$
$$\Longrightarrow \langle x, u \rangle - \langle y, u \rangle \leq -2\varepsilon$$
Τότε $\sup_{x \in A} \langle x, u \rangle - \inf_{y \in B} \langle y, u \rangle \leq -2\varepsilon$

Έστω $a = \sup_{x \in A} \langle x, u \rangle$, $b = \inf_{y \in B} \langle y, u \rangle$ και τότε $a - b \leq -2\varepsilon \Longrightarrow$
$$\Longrightarrow b - a \geq 2\varepsilon$$

Έστω $c = \frac{a + b}{2}$. Τότε $a = \sup_{x \in A} \langle x, u \rangle \leq c - \varepsilon < c + \varepsilon \leq \inf_{y \in B} \langle y, u \rangle = b$

Ξέρουμε ότι αν $x \notin K$, K = κλειστό + κυρτό, τότε τα x, K διαχωρίζονται αυστηρά

Για να διαχωρίσουμε A, B με $A \cap B = \emptyset$ θα πρέπει:

(i) $0 \notin A - B$ (προφανώς αφού $A \cap B = \emptyset$)

(ii) $A - B$ κυρτό / αν A, B = κυρτά ισχύει

(iii) $A - B$ κλειστό / δεν ισχύει αν A, B κλειστά, πρέπει να πάρουμε A = συμπαγές, B = κλειστό

Θεώρημα: Έστω $A, B \subseteq X$ (X = χώρος Hilbert) κυρτά με A = σ[υμπαγές], B = κλειστό και $A \cap B = \emptyset$. Τότε τα A, B διαχωρίζονται αυστηρά

Απόδειξη

A, B διαχωρίζονται αυστηρά $\Leftrightarrow$ $0, A - B$ διαχωρίζονται αυστηρά

Όμως $0 \notin A - B$ (αφού $A \cap B = \emptyset$), $A - B$ κυρτό σύνολο (από γνω[στή] άσκηση) και $A - B$ είναι κλειστό

Άρα από προηγούμενο Θεώρημα $0, A - B$ διαχωρίζονται αυστηρά

Ερώτημα

Είναι σωστό ότι αν A, B = κυρτά + κλειστά, $A \cap B = \emptyset$ τότε τα A, B διαχωρίζονται;

Αν ο X = χώρος Hilbert άπειρης διάστασης $\rightarrow$ ΛΑΘΟΣ

$X = \mathbb{R}^d \rightarrow$ Σωστό (και χωρίς την υπόθεση να είναι κλειστά)

Θα δώσουμε παράδειγμα χώρου Hilbert άπειρης διάστασης και $A, B \subseteq X$ κυρτά + κλειστά, $A \cap B = \emptyset$ και $\nexists u \in X$, $\|u\| = 1$ τ.ω. $\sup_{x \in A} \langle x, u \rangle \leq \inf_{y \in B} \langle y, u \rangle$

Αντιπαράδειγμα

$X = \ell^2 = \{ (x_n)_n : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \}$

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad \text{και} \quad \|(x_n)_n\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right)^{1/2}$$

Παίρνουμε $B = \{ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} : y_1 \in \mathbb{R}$ και $y_n = 0 : n \geq 2 \}$

Τότε $B \neq \emptyset$, κλειστό, κυρτό

Παίρνουμε $A = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : x_1 \geq n |x_n - n^{-2/3}|$ για $n \geq 2 \}$

Τότε $A \neq \emptyset$ γιατί η $x_n = n^{-2/3} \in A$ (προφανώς)

A = κυρτό ($|x-a|$ κυρτή)

A = κλειστό

Ακόμα, $A \cap B = \emptyset$. Πράγματι αν $(y_1, 0, \dots) \in B \cap A$, τότε θα έπρεπε $y_1 \geq n|0 - n^{-2/3}| = n^{2/3}$, $n \geq 2 \to$ ΑΤΟΠΟ

Επίσης, $\overline{A-B} = \ell^2$ (✱)

Αν A, B διαχωρίζονται τότε $0, A-B$ διαχωρίζονται. Προφανώς αφού $A \cap B = \emptyset$, $0 \notin A-B$, θα υπήρχε $u \in \ell^2 : \|u\| = 1$ με

$\langle x-y, u \rangle \leq 0 = \langle 0, u \rangle$ με $x-y \in A-B$

και τότε από την (✱) θα είχαμε $\langle w, u \rangle \leq 0$ $\forall w \in \ell^2$ (από τη συνέχεια του $\langle \rangle$). Όμως για $w = u$, $\langle u, u \rangle = \|u\|^2 = 1 > 0 \to$

$\text{Εσ}(A-B) = \emptyset$. Πράγματι,

Αν $\text{εσ}(A-B) \neq \emptyset$, τότε $\text{εσ}(A-B) = \text{εσ}(\overline{A-B}) = \ell^2$

$\Rightarrow A-B = \ell^2 \to$ ΑΤΟΠΟ αφού $0 \notin A-$

Μένει λοιπόν να δείξουμε την (✱)

Έστω $z \in \ell^2$ και έστω $\varepsilon > 0$.

$z = (z_n)_n$

$\exists k \in \mathbb{N} : \sum_{m=k+1}^{\infty} z_n^2 < \varepsilon^2/4$, $\sum_{n=k+1}^{\infty} \left(1/n^{2/3} \right)^2 < \varepsilon^2/4$

$$x = (x_n)_n \text{ με } x_n = \begin{cases} \max_{1 \leq v \leq k} v|z_v - v^{-2/3}|, & n=1 \\ z_n, & 2 \leq n \leq k \\ \frac{1}{n^{2/3}}, & n \geq k+1 \end{cases}$$

και $Y=(Y_n)=(x_1-z_1,0,\dots)$

Τότε $\|z-(x-y)\| = \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |z_n - n^{2/3}|^2\right)^{1/2} < \dots < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

Και άρα $(A-B)$ πυκνό στον ℓ^2

Διαχωρισμός κυρτών συνόλων στον $\mathbb{R}^d$

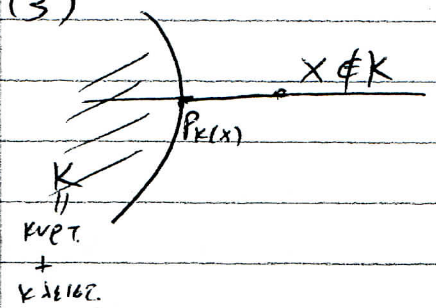
Θεωρούμε τον $\langle \mathbb{R}^d, \|\cdot\| \rangle$.

Χρειαζόμαστε τα εξής:

(1) $S(0,1)$, $bd\,S(0,1)$ είναι συμπαγείς

(2) Αν K = κυρτό $(\neq\emptyset) \Rightarrow ri\,K\neq\emptyset$

(3)



$\ell_x=\{P_K(x)+t(x-P_K(x)) : t\geq 0\}$

Τότε

$P_K(y)=P_K(x)$, για $y\in\ell_x$