Παρασκευή 5 Απριλίου 2013 Κυρτή Ανάλυση

Μάθημα 7

Διαχωριστικά Θεωρήματα σε χώρο Hilbert (ειδικότερα στον $\mathbb{R}^d$)

Χώρος με εσωτερικό γινόμενο:

Έστω $X \neq \emptyset$ διαν. χώρος. Μια απεικόνιση $\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ καλείται εσωτερικό γινόμενο, αν:

i) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $x \in X$, αν $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

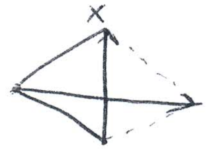
iii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

iv) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Για $x \in X$, ορίζουμε $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ (νόρμα επαγόμενη από το εσωτ. γινόμενο)

Ιδιότητες που χρειαζόμαστε

1) Κανόνας του παραλληλογράμμου: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$



2) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (Cauchy–Schwarz)

3) Το $bd\, S(0,1)$ δεν περιέχει ευθύγραμμα τμήματα

(Αν $x_0 \in X$, $r > 0$, $S(x_0, r) = x_0 + r S(0,1)$

$\Rightarrow$ Το $bd\, S(x_0, r)$ δεν περιέχει ευθύγραμμα τμήματα)

Απόδειξη του ισχυρισμού 3

Έστω x, y, $x \neq y$ με $\|x\| = \|y\| = 1$. Τότε $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \underset{\text{κ.π.}}{=} 4 > \|x+y\|^2 \; (x \neq y)$

Άρα $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in S(0,1)$

Ορισμοί: Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο

1) Έστω $x \in X$, $K \subseteq X$, $K \neq \emptyset$. Τότε $d(x,K) = \inf(\{\|x-y\| : y \in K\})$

$$d(x,K)=0 \Leftrightarrow x \in \overline{K}$$

2) Έστω $K \neq \emptyset$. Το K καλείται proximinal $\Leftrightarrow$ για κάθε $x \in X$ $\exists y \in K$ ώστε $d(x,K) = \|x-y\|$

3) $K \neq \emptyset$ ονομάζεται Chebyshev $\Leftrightarrow$ για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακριβώς ένα $y_x \in K$: $d(x,K) = \|x-y_x\|$

4) Αν $x \in X$ και υπάρχει $y \in K$: $d(x,K) = \|x-y\|$ το y καλείται εγγύτατο σημείο του x ή βέλτιστη προσέγγιση του x (ως προς K)

Πρόταση: Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $K \subseteq X$, $K \neq \emptyset$. Τότε ισχύουν τα εξής:

1) $K =$ proximinal $\Rightarrow$ $K =$ κλειστό
2) $K =$ κλειστό, $X =$ άπειρης διάστασης $\not\Rightarrow$ $K =$ proximinal
3) $K =$ κλειστό, $X = \mathbb{R}^d$ $\Rightarrow$ $K =$ proximinal
4) $K =$ prox. + $K =$ κυρτό $\Rightarrow$ K Chebyshev
5) Αν $X = \mathbb{R}^d$, $K =$ κλειστό + κυρτό $\Rightarrow$ K Chebyshev

---

Απόδειξη

(1) Έστω ότι $K =$ proximinal. Θεωρούμε $x_n \in K$, $x_n \to x \in X$. Τότε, από τον ορισμό του proximinal συνόλου $\exists y \in K$: $\|x-y\| = d(x,K) \leq \|x_n - x\| \to 0$

$$\Rightarrow \|x-y\| = 0 \Rightarrow x = y \in K \Rightarrow K \text{ κλειστό}$$

Συνέχεια Απόδειξης Πρότασης

(2) $C_2([-1,1]) = \{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \text{ συνεχής} \}$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} fg \,, \quad \|f\| = \int_{-1}^{1} f^2$$

Έστω $M = \{ f \in C_2 : \int_0^1 f = 0 \}$ δ. υπόχωρος. Το M είναι κυρτό σύνολο (ως διανυσματικός υπόχωρος). Ακόμα, το M είναι κλειστό.

Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$: $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f \in C_2$. Τότε $\left| \int_0^1 f \right| = \left| \int_0^1 (f_n - f) \right| \leq \int_0^1 |f_n - f| =$

$$= \langle |f_n - f|, 1 \rangle \leq \|f_n - f\| \cdot \underset{\|1\|}{\underset{\|}{\sqrt{2}}} \xrightarrow{\|\cdot\|} 0 \implies \int_0^1 f = 0 \implies f \in M$$

Άρα M κλειστός υπόχωρος

Έστω τώρα $g(x) = 1$, $x \in [-1,1]$ Τότε $g \notin M$ (προφανώς) και $d(g, M) = 1$ και $\|g - f\| > 1 \;\; \forall f \in M$. (καμιά $f \in M$ δεν υλοποιεί την απόσταση)

Δηλ. M = κυρτό + κλειστό δεν είναι proximinal

---

(3) $X = \mathbb{R}^d$, K = κλειστό. Τότε ο.δ.ο. K = proximinal.

Έστω $x \in X$ Τότε $d(x, K) = \inf \{ \|x - y\| : y \in K \}$

Τότε $\exists \, y_n \in K$: $\|x - y_n\| \to d(x, K)$

Ακόμα, $\|y_n\| \leq \|x - y_n\| + \|x\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, άρα από θεώρημα Bolzano-Weierstrass $\exists \, y_{k_n} \to y \in K$ = κλειστό

και άρα $\underline{\|x - y\| = d(x, K)}$

---

(4) K = prox, K = κυρτό $\implies$ K Chebyshev

Δηλ. $\forall x \in X \;\; \exists! \, y_x \in K$: $\|x - y_x\| = d(x, K)$

Έστω $x \notin K$. Έστω $y_1, y_2 \in K$: $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d(x, K) = \delta > 0$

Τότε $y_1, y_2 \in \text{bd}\, S(x, \delta)$ και το $\text{bd}\, S(x, \delta)$ δεν έχει ευθύγραμμα τμήματα

Θα πρέπει $\left\| x - \frac{y_1 + y_2}{2} \right\| < \delta$

Όμως, επειδή K=κυρτό, $\frac{y_1+y_2}{2} \in K$. και τότε

$$\|x-\underbrace{\frac{y_1+y_2}{2}}_{\in K}\| < \inf\{\|x-y\| : y\in K\} \longrightarrow \text{ΑΤΟΠΟ}$$

---

(5) Αν $X=\mathbb{R}^d$, K = κλειστό + κυρτό $\Longrightarrow$ K Chebyshev

Άμεσο από (3),(4)

Παρατηρήσεις: (i) Αν $X=\mathbb{R}^d$, $K\subseteq X$. Τότε, K κλειστό + κυρτό $\Longleftrightarrow$ K Chebyshev

(ii) Έστω X χώρος Hilbert και K = κυρτό + κλειστό $\Longrightarrow$ K Chebyshev

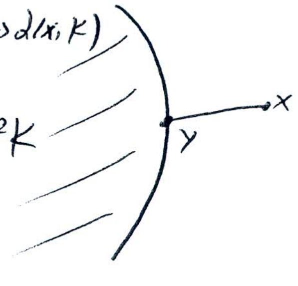
Και το ερώτημα είναι αν σε ένα χώρο Hilbert X κάθε σύνολο Chebyshev είναι κυρτό. Δεν έχουμε δώσει ακόμη απάντηση.

[Υπενθύμιση: Ένας χώρος $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ λέγεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης χώρος ως προς τη νόρμα $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$]

Θεώρημα: Έστω X χώρος Hilbert, $K\subseteq X$ K = κλειστό + κυρτό. Τότε, το K είναι Chebyshev

Απόδειξη: Έστω $x\notin K$. Θα αποδείξουμε ότι $\exists y\in K: \|x-y\| = d(x,K)$

$d(x,K) = \inf\{\|x-y\| : y\in K\}$. Έστω $(y_n)_{n\geq 1}\subseteq K: \|x-y_n\| \to d(x,K)$



$$\|(x-y_n)+(x-y_m)\|^2 + \|(x-y_n)-(x-y_m)\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2$$

$$\Longrightarrow \|y_n-y_m\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - 4\|x-\frac{y_n+y_m}{2}\|^2 \leq$$

$$\leq 2\underbrace{\|x-y_n\|^2}_{\substack{\downarrow\\(d(x,K))^2}} + 2\underbrace{\|x-y_m\|^2}_{\substack{\downarrow\\(d(x,K))^2}} - 4(d(x,K))^2 \longrightarrow 0$$

Άρα η ακολουθία $(y_n)_n$ είναι Βασική.

Συνέχεια απόδειξης θεωρήματος

Όμως $X =$ πλήρης, άρα $\exists\, y \in K$ έτσι ώστε $y_n \to y$

$$\left.\begin{array}{c} \|x-y_n\| \to d(x,K) \\ \downarrow \\ \|x-y\| \end{array}\right\} \Rightarrow \|x-y\| = d(x,K)$$

Μετρική προβολή

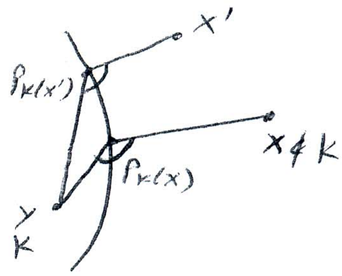
Έστω X χώρος Hilbert, $K \subseteq X$, $K =$ κλειστό + κυρτό. Τότε $\forall x \in X$ υπάρχει ακριβώς ένα $y_x \in K$: $\|x-y_x\| = d(x,K)$

Ορίζουμε $P_K : X \to K$ ώστε $P_K(x) = y_x$

Η P_K καλείται <u>μετρική προβολή</u> του χώρου X στο K.

- Αν $x \notin K$, τότε $P_K(x) \in \mathrm{bd}\, K$ (προφανώς)

Χαρακτηρισμός του εγγύτατου σημείου



Έστω $K =$ κυρτό + κλειστό, $x \in K$, $y_0 \in K$

Τότε $y_0 = P_K(x) \Leftrightarrow \langle x-y_0, y-y_0 \rangle \leq 0$

Απόδειξη.

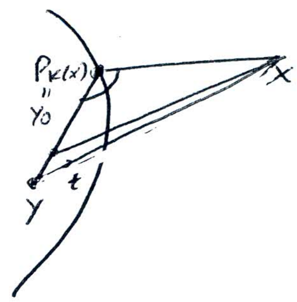
$(\Leftarrow)$: Έστω $y \in K$. Τότε $\|x-y_0\|^2 = \langle x-y_0, x-y_0 \rangle = \langle x-y_0, x-y \rangle + \langle x-y_0, y-y_0 \rangle \leq$

$$\leq \langle x-y_0, x-y \rangle \underset{C-S}{\leq} \|x-y_0\|\,\|x-y\| \Rightarrow \|x-y_0\| \leq \|x-y\| \quad \forall y \in K$$

$$\Rightarrow d(x,K) = \|x-y_0\|$$

και άρα από τη μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης $y_0 = P_K(x)$

(⇒) Έστω $x \notin K$, $y \in K$ με $y \neq y_0$



Έστω $t \in (0,1)$, $z_t = y_0 + t(y-y_0) \in K$ (γιατί K κυρτό)

Τότε $\|x-y_0\|^2 \leq \|x-z_t\|^2 = \|(x-y_0) - t(y-y_0)\|^2 =$

$$= \|x-y_0\|^2 + t^2\|y-y_0\|^2 - 2t\langle x-y_0, y-y_0\rangle$$

$\Rightarrow 2\langle x-y_0, y-y_0\rangle \leq t\|y-y_0\|^2$, $y \neq y_0$, $t \in (0,1]$.

Άρα $\langle x-y_0, y-y_0\rangle \leq 0$.

<u>Πόρισμα</u>: Έστω K = κλειστό + κυρτό, $x \notin K$. Θεωρούμε $e_x = \{y_0 + t(x-y_0), t>0\}$, $y_0 = P_K(x)$. Τότε $P_K(y) = P_K(x)$ για $y \in e_x$.

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω $y \in e_x$, $y = y_0 + t(x-x_0)$ για κάποιο $t>0$

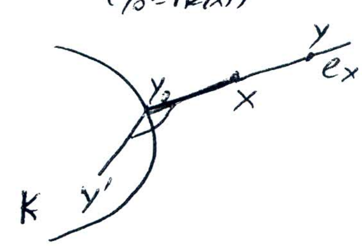
Έστω $y' \in K$

Τότε $\langle y-y_0, y'-y_0\rangle = \langle t(x-y_0), y'-y_0\rangle = t\langle x-y_0, y'-y_0\rangle \leq 0$

($y_0 = P_K(x)$)

Τότε $\langle y-y_0, y'-y_0\rangle \leq 0 \Rightarrow$

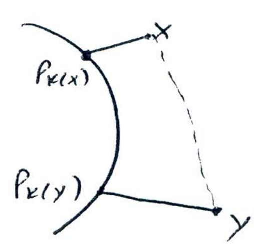
$\Rightarrow y_0 = P_K(y)$



<u>Ιδιότητες της P_K</u> (K κλειστό + κυρτό $\subseteq X$)

(1) $P_K \circ P_K = P_K$, $P_K^2 = P_K$

(2) $\langle x-y, P_K(x) - P_K(y)\rangle \geq \|P_K(x) - P_K(y)\|^2$, $x, y \in X$



Ιδιότητες της P_K (Συνέχεια)

(2) $\langle x-y, P_K(x)-P_K(y)\rangle \geq \|P_K(x)-P_K(y)\|^2$, $x,y\in X$

Πράγματι, $\langle x-y, P_K(x)-P_K(y)\rangle = \langle (x-P_K(x)) + (P_K(x)-P_K(y)) + (P_K(y)-y), P_K(x)-P_K(y)\rangle$

$= \|P_K(x)-P_K(y)\|^2 - \langle x-P_K(x), \underbrace{P_K(y)-P_K(x)}_{\in K}\rangle - \langle y-P_K(y), \underbrace{P_K(x)-P_K(y)}_{\in K}\rangle$

Όμως: $\langle x-P_K(x), P_K(y)-P_K(x)\rangle \leq 0$, $\langle y-P_K(y), P_K(x)-P_K(y)\rangle \leq 0$.

Άρα τελικά $\langle x-y, P_K(x)-P_K(y)\rangle \geq \|P_K(x)-P_K(y)\|^2$.

(3) $\langle x-y, P_K(x)-P_K(y)\rangle \geq 0$ (προφανώς από (2))

(4) $\|x-y\|^2 \geq \|P_K(x)-P_K(y)\|^2 + \|(x-P_K(x))-(y-P_K(y))\|^2$ (αφήνεται ως άσκηση)

(5) $\|P_K(x)-P_K(y)\| \leq \|x-y\|$ $\forall x,y\in X$.

(προφανώς από το (4))

Άρα η $P_K : X \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση Lipschitz, άρα η P_K είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Άθροισμα συνόλων (κατά Minkowski)

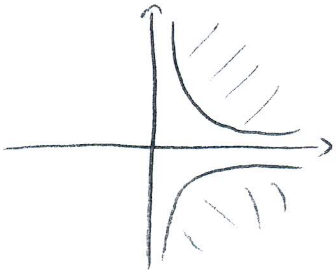
Έστω $X =$ δ. χώρος, $A, B \subseteq X$. Ορίζουμε:

$A+B = \{a+b \in X : a\in A,\ b\in B\}$

Ασκήσεις

1) Αν $A,B =$ κυρτά $\Rightarrow A+B =$ κυρτό

2) Αν $A,B =$ κλειστά $\not\Rightarrow A+B =$ κλειστό



$A = \{(x, \frac{1}{x}) : x>0\}$, $B = \{(x, -\frac{1}{x}) : x>0\}$ Τότε $A+B = \{(x,y) : x>0,\ y\in\mathbb{R}\}$

Αν όμως A = συμπαγές, B = κλειστό $\Rightarrow$ $A+B$ = κλειστό

Αν $a_n + b_n \in A+B$, $a_n + b_n \to x \in X$ τότε $x \in A$

$(a_n)_n \subseteq A$ και αφού A συμπαγές $\exists (a_{k_n})_n : a_{k_n} \to a \in A$.

Τότε $b_n \to x - a \in B$

Τότε $x = \underset{A}{\underset{\cap}{a}} + \underset{B}{\underset{\cap}{\underbrace{(x-a)}}} \in A+B$

<u>Ασκήσεις</u>

1

i) Αν $A, B \subseteq X$ κυρτά $\Rightarrow$ $A+B$, λA είναι κυρτά

ii) A = κυρτό, $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot \mu > 0$

Ισχύει το (ii) για B τυχαίο;

2 $\operatorname{con}(A+B) = \operatorname{con} A + \operatorname{con} B$