Δευτέρα 1 Απριλίου 2013 — Κυρτή Ανάλυση

Μάθημα 6

[Υπενθύμιση

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $a \in A$, $<A-a> = H = <A-b>$ $\forall b \in A$

Παίρνουμε $f = a + H$ και θέτουμε $aff(A) = F = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : a_i \in A, \sum \lambda_i = 1\}$ (αφφινική θήκη του A)

$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ αφφινικά ανεξάρτητο $\Leftrightarrow \nexists x_i \in A : x_i \in aff(A \setminus \{x_i\})$

$\Leftrightarrow \nexists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0,0,\ldots,0)$ έτσι ώστε $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$

Ακόμα, ορίζουμε $\dim_a A = \dim <A-a>$ και $\dim_a A = k (\geq 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \{x_1, \ldots, x_{k+1}\} \subseteq A$ αφφ. ανεξάρτητο και $\{y_1, \ldots, y_N\}$, $N \geq k+2$ είναι αφφ. εξαρτημένο

Τέλος, αν $A \subseteq \mathbb{R}^d$, ορίσαμε $ri(A) = \{x \in A, \exists S(x,\varepsilon) : S(x,\varepsilon) \cap A \subseteq A\}$ (σχετικό εσωτερικό)

και αποδείξαμε ότι αν $S = co\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$, $\dim_a S = k$, τότε $ri(S) \neq \emptyset$]

Πρόταση: Έστω $K \neq \emptyset$ κυρτό. Τότε $ri K \neq \emptyset$ (Κάθε κυρτό έχει μη κενό σχ. εσωτερικό)

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $\dim K = k$, $K \subseteq F = aff(K)$

Άρα $\exists \{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\} \subseteq K$ αφφ. ανεξάρτητο. Τότε $co\{x_1, \ldots, x_{k+1}\} = S \subseteq K$ (επειδή K κυρτό)

Επιπλέον, $aff(S) = aff(K)$ και έχουμε δει ότι $ri(S) \neq \emptyset$ και $ri S \subseteq ri K \Rightarrow ri K \neq \emptyset$

Πρόταση: Έστω K κυρτό, $x_0 \in ri K$, $y \in \bar{K}$. Τότε $[x_0, y) \subseteq ri K$

Απόδειξη

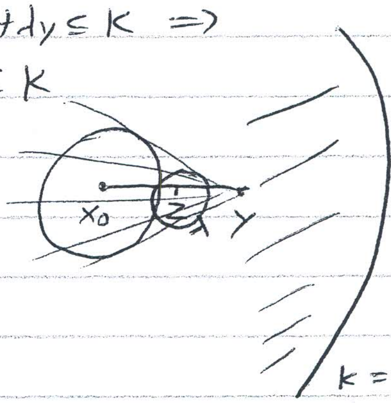
Υποθέτουμε ότι $K \subseteq \mathbb{R}^d$, $\dim K = d$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας)

• Αν $y \in K$. Τότε $x_0 \in K^\circ$. Επομένως $\exists\, S(x_0, r) \subseteq K$

Έστω $\lambda \in (0,1)$. Τότε $(1-\lambda) S(x_0,r) + \lambda y \subseteq K \Rightarrow$

$\Rightarrow S((1-\lambda)x_0 + \lambda y, (1-\lambda) r) \subseteq K$

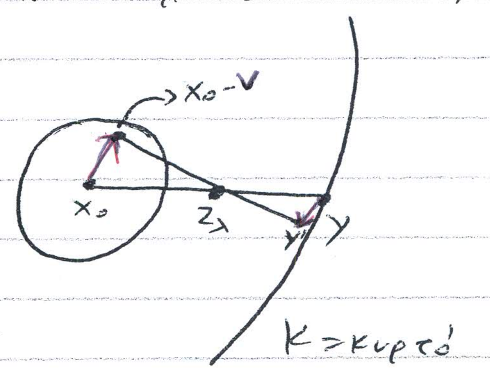
$\Rightarrow (1-\lambda)x_0 + \lambda y \in K^\circ$



Άρα, δείξαμε ότι αν $y \in K$, τότε $[x_0, y) \subseteq K^\circ$

• Αν $y \in \bar{K} \setminus K$. Παίρνουμε όπως πριν $S(x_0, r) \subseteq K$, $\lambda \in (0,1)$ και $z_\lambda = (1-\lambda)x_0 + \lambda y$

Επειδή $y \in \bar{K} \setminus K$, υπάρχει $y' \in K$, ώστε $0 < \|y' - y\| < \frac{1-\lambda}{\lambda} r$



Τότε $y' = y + \frac{1-\lambda}{\lambda} v$, $\|v\| < r$

Τότε $x_0 - v \in S(x_0, r)$

Τότε $z_\lambda = (1-\lambda)x_0 + \lambda y = (1-\lambda)(x_0 - v) + \lambda y' = (1-\lambda)(x_0 - v) + \lambda\left(y + \frac{(1-\lambda)}{\lambda} v\right)$

$\cancel{= (1-\lambda)(x_0 - v) + \lambda y'}$, $x_0 - v \in S(x_0, r) \subseteq K^\circ$, $y' \in K$

Και άρα, από την προηγούμενη περίπτωση $z_\lambda \in K^\circ$

Ασκήσεις

(1) Έστω K κυρτό $\Rightarrow ri K$ κυρτό (πρ. πρότασης)

$\Rightarrow \bar{K}$ κυρτό (άμεσο)

(2) Αν K = κυρτό, τότε $\bar{K} = \overline{ri K}$

$ri(\bar{K}) = ri(K) = ri(ri K)$

$rb(\bar{K}) = rb(K) = rb(ri K)$

③

(i) Αν K_1, K_2 κυρτά με $ri K_1 \cap ri K_2 \neq \emptyset$ τότε $ri(K_1 \cap K_2) = ri K_1 \cap ri K_2$

(ii) Αν $\{K_i : i \in I\}$ κυρτά, $\bigcap_{i \in I} ri(K_i) \neq \emptyset$, τότε $\overline{\bigcap_{i \in I} K_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{K_i}$

④ Έστω K κυρτό. Τότε

(i) $x \in \overline{K} \iff \exists y \in K : [y, x) \subseteq K$

(ii) $x_0 \in ri K \iff \forall x \in K \setminus \{x_0\}\ \exists \mu > 1 : (1-\mu)x + \mu x_0 \in K$

(iii) $P = conv\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$, τότε $ri P = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : \sum \lambda_i = 1, \lambda_i > 0\}$

Θεωρήματα: Καραθεοδωρή, Radon, Helly

Ιδέα των τριών αυτών θεωρημάτων είναι η εξής:

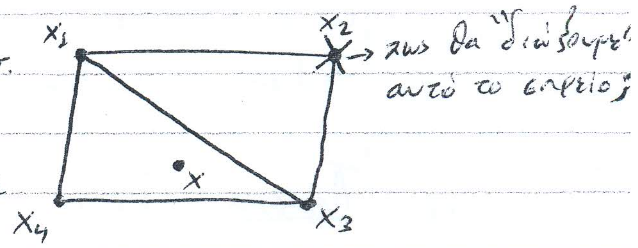
Αν $\dim_a A = k$, $\exists \{x_1, \dots, x_{k+1}\} \subseteq A$ αφ. ανεξ. και αν $\{y_1, \dots, y_N\} \subseteq A$, $N \geq k+2$ αφ. εξ., δηλ. $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ όχι όλα ίσα με μηδέν, με $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 0$ και $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i = 0$

Θεώρημα Καραθεοδωρή: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $\dim A = k$. Τότε ισχύει ότι $conv A = \{\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i : x_i \in A, \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}$

Απόδειξη

Έστω $x = \sum_{i=1}^{m} t_i x_i \in conv(A)$, $t_i > 0$, $x_i \neq x_j\ \forall i \neq j$ με $m \geq k+2$, $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$

$\dim_a A = k$, $\{x_1, \dots, x_m\}$, $m \geq k+2$ αφ. εξαρτ.



Άρα $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$ έτσι ώστε $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$ (1) και

$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = 0$ (2). Έστω $I_0 = \{1, 2, \dots, m\}$ και παίρνουμε ακόμα

$I = \{i \in I_0 : \lambda_i > 0\} \neq \emptyset$ (από (1)) και

$J = \{j \in I_0 : \lambda_j \leq 0\} \neq \emptyset$

Τότε $I_0 = I \cup J$, $I \cap J = \emptyset$

(Συνέχεια απόδειξης)

Έστω $r = \min\left\{\frac{t_i}{\lambda_i} : i \in I\right\} = \frac{t_{i_0}}{\lambda_{i_0}}$, για κάποιο $i_0 \in I$. Προφανώς $r>0$.

Θέτουμε $\beta_i = t_i - r\lambda_i$, $i \in I_0$

Έστω τώρα $i \in I_0$. Αν $i = i_0$, $\beta_{i_0} = 0$

Αν $i \in I$, (δηλ. $\lambda_i > 0$), $\beta_i \geq 0$

Αν $i \in J$, (δηλ. $\lambda_i \leq 0$), $\beta_i > 0$

Έχουμε λοιπόν $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\beta_{i_0} = 0$. Ακόμα, ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i = \sum_{i=1}^{m} t_i - r \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overset{(1)}{=} 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{m} (t_i - r\lambda_i) x_i = \sum_{i=1}^{m} t_i x_i - r \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{m} t_i x_i$$

Άρα το x γράφεται στη μορφή $x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \beta_i x_i$ (γράψαμε το x ως κυρτό συνδυασμό $(m-1)$ σημείων)

Σταματάμε τη διαδικασία εάν $m-1 = k+1$ ενώ αν $m-1 \geq k+2$ συνεχίζουμε έως ότου φτάσουμε στο $k+1$

Άρα δείξαμε $\operatorname{con} A \subseteq \left\{\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i : x_i \in A, \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\right\}$

Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι προφανής και άρα τελικά δείξαμε το ζητούμενο

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$, A = συμπαγές. Τότε $\operatorname{con}(A)$ είναι συμπαγές

Ιδιαιτέρως, τα <u>πολύτοπα</u> είναι συμπαγή

Απόδειξη πορίσματος Θ. Καραθεοδωρή

Έστω $\Delta = \{(t_1,t_2,\dots,t_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} : t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1\}$ συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^{k}$

Θεωρούμε τώρα την $f : \Delta \times \underbrace{(A \times A \times \dots \times A)}_{k+1} \longrightarrow \mathrm{con}(A)$

$$f((t_1,\dots,t_{k+1}),(x_1,\dots,x_{k+1})) = \sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i$$

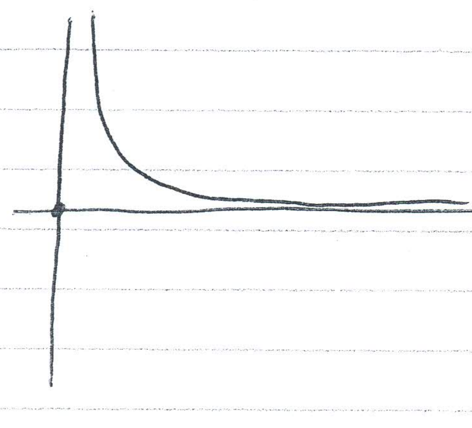
Η f είναι συνεχής και $\Delta \times A \times A \times \dots \times A$ ως καρτεσιανό γινόμενο συμπαγών είναι συμπαγές

Άρα $f(\Delta \times A^{k+1})$ = συμπαγές

Όμως από Θ. Καραθεοδωρή $f(\Delta \times A^{k+1}) = \mathrm{con}\,A$ και άρα $\mathrm{con}\,A$ είναι **συμπαγές**

Ασκήσεις

1. A = φραγμένο, $\mathrm{διαμ}(A) = \mathrm{διαμ}(\mathrm{con}\,A)$
2. A = ανοιχτό $\Rightarrow$ $\mathrm{con}\,A$ = ανοιχτό
3. A κλειστό $\not\Rightarrow$ $\mathrm{con}\,A$ κλειστό



$A = \{(x,\frac{1}{x}) : x > 0\} \cup \{(0,0)\}$ κλειστό

$\mathrm{con}\,A = \{(x,y) : x,y > 0\} \cup \{(0,0)\}$ **δεν** είναι κλειστό

Παρατήρηση

(X,ρ) μετρικός χώρος, $A\subseteq X$ άπειρης διάστασης. Αν A συμπαγές $\not\Rightarrow$
$\not\Rightarrow$ $\operatorname{con} A =$ συμπαγές

$$\ell_2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\} , \quad \|(x_n)_n\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}$$

Έστω $e_1 = (1,0,\dots)$

$\frac{1}{2}e_2 = (0,\frac{1}{2},0,\dots)$

Γενικά $u_n = \frac{1}{n}e_n$, $e_n = (0,\dots,0,\underset{n\text{-θέση}}{1},0,\dots)$

Τότε $u_n \to 0 = (0,\dots,0,\dots)$

Έστω $A = \{(u_n) : n\in\mathbb{N}\} \cup \{0\}$ συμπαγές

Θέλουμε τώρα να μελετήσουμε τη $\operatorname{con} A$

Θέτουμε

$$x_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} u_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}\frac{1}{2}, \frac{1}{2^3}\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2^k}\frac{1}{k}, 0, 0, \dots\right)$$

Τότε $x_k \in \operatorname{con} A$ και $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\|\cdot\|} \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^k}\frac{1}{k}, \frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{k+1}, \dots\right) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n \notin \operatorname{con} A$$

Άρα $\operatorname{con} A$ δεν είναι κλειστό $\Rightarrow$ $\operatorname{con} A$ όχι συμπαγές

Θεώρημα Radon: Έστω $A = \{x_1,\dots,x_m\}$, $A\subseteq\mathbb{R}^d$, $\dim A = d$, $m \geq d+2$.
Τότε $\exists\, B,\Gamma \subseteq A$, $B,\Gamma \neq \emptyset$, $B\cap\Gamma = \emptyset$, $A = B\cup\Gamma$, τέτοια ώστε $\operatorname{con} B \cap \operatorname{con}\Gamma \neq \emptyset$

Απόδειξη

Εφ' όσου $m \geq d+2$ και $\dim A = d$, $\{x_1,\dots,x_{d+2}\}$ αφ. εξαρτ.
$\exists\, \lambda_i$ όχι όλα ίσα με μηδέν με $\lambda_1 + \dots + \lambda_{d+2} = 0$ (1) και
$\sum_{i=1}^{d+2} \lambda_i x_i = 0$

Θέτουμε $I = \{i \in \{1,\dots,d+2\} : \lambda_i > 0\} \neq \emptyset$

$J = \{j \in \{1,\dots,d+2\} : \lambda_j \leq 0\} \neq \emptyset$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

$I = \{1,2,\dots,\nu\}$

$J = \{\nu+1,\dots,d+2\}$

(Συνέχεια απόδειξης Θ. Radon)

$I=\{1,\dots,\nu\}$ $\quad \lambda_1+\dots+\lambda_\nu \geq 0$

$J=\{\nu+1,\dots,d+2\}$ $\quad \lambda_{\nu+1}+\dots+\lambda_{d+2} \leq 0$ $\quad$ και $\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i + \sum_{j=\nu+1}^{d+2}\lambda_j = 0$

Τότε αν $\lambda = \sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i > 0$, $\lambda = \sum_{j=\nu+1}^{d+2}(-\lambda_j)$

$$x=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{\lambda_i}{\lambda}x_i \in con\{x_1,\dots,x_\nu\}$$

$$x=\sum_{j=\nu+1}^{d+2}\frac{(-\lambda_j)}{\lambda}x_j \in con\{x_{\nu+1},\dots,x_{d+2}\}$$

Θέτοντας $B=\{x_1,\dots,x_\nu\}$, $\Gamma=\{x_{\nu+1},\dots,x_{d+2}\}$ έχουμε ότι $B\cap\Gamma=\emptyset$, $A=B\cup\Gamma$, $conB\cap con\Gamma\neq\emptyset$, αφού $x\in conB\cap con\Gamma$

Θεώρημα Helly: Έστω $A_1,\dots,A_m$, $m\geq d+1$ κυρτά σύνολα. Υποθέτουμε ότι κάθε $(d+1)$ από τα $A_1,\dots,A_m$ έχουν μη κενή τομή. Τότε $A_1\cap\dots\cap A_m\neq\emptyset$

Απόδειξη

Εάν $m=d+1$ ισχύει από υπόθεση (ταυτολογία)

Έστω ότι ισχύει το ζητούμενο για $m\geq d+1$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $\{A_1,A_2,\dots,A_{m+1}\}$ οικογένεια κυρτών συνόλων

Από την επαγωγική υπόθεση $\exists x_1\in A_2\cap\dots\cap A_{m+1}$

$\exists x_2\in A_1\cap A_3\cap\dots\cap A_{m+1}$

$\vdots$

$\exists x_{m+1}\in A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_m$

Εάν π.χ. $x_1=x_2\in A_1\cap\dots\cap A_{m+1}$ και έπεται το ζητούμενο

Έστω ότι $x_i\neq x_j$ για $i\neq j$. Τότε το σύνολο $\{x_1,\dots,x_{m+1}\}$, $m+1\geq d+2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Radon. Άρα,

$\exists B=\{x_1,x_2,\dots,x_\nu\}$, $\Gamma=\{x_\nu,\dots,x_{m+1}\}$, $conB\cap con\Gamma\neq\emptyset$

$$x_1,x_2,\dots,x_\nu\in A_{\nu+1}\cap A_{\nu+2}\cap\dots\cap A_{m+1} \Rightarrow conB\subset \underbrace{con\left(\bigcap_{i=\nu+1}^{m+1}A_i\right)}_{\text{κυρτό ως τομή κυρτών}}=\bigcap_{i=\nu+1}^{m+1}A_i$$

Ομοίως, $x_{\nu+1}, \ldots, x_{m+1} \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\nu$ και όπως πριν $\mathrm{conv}\,\Gamma \subseteq A_1 \cap \ldots \cap A_\nu$

Τότε, $\emptyset \neq \mathrm{conv}\,B \cap \mathrm{conv}\,\Gamma \subseteq A_{\nu+1} \cap \ldots \cap A_{m+1} \cap A_1 \cap \ldots \cap A_\nu \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{m+1} A_i \neq \emptyset$ που ήταν το ζητούμενο

Ασκήσεις

(1) Εάν $\{A_i : i \in I\}$ άπειρη οικογένεια κυρτών συνόλων : κάθε $(d+1)$ από αυτά τέμνονται $\not\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ (δηλ. το Θ. Helly δεν ισχύει εν γένει για άπειρη οικογένεια)

($\pi.\chi.$ $A_n = [n, +\infty)$)

(2) Έστω $\{A_i : i = 1, \ldots, d+1\}$, $0 \in \mathrm{conv}\,A_i \;\forall i = 1, \ldots, d+1$. Τότε $\exists x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2, \ldots, x_{d+1} \in A_{d+1} : 0 \in \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_{d+1}\}$

(Θεώρημα Bárány / 1982 – λέγεται και έγχρωμο Θεώρημα του Καραθεοδωρή)